**ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН**

**МДТ «ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ БОХТАР БА НОМИ НОСИРИ ХУСРАВ»**

ТДУ: 37 тоҷик+51+53+001
ТКБ 71.03 (2 тоҷик)+22.3+22.1+72.3
И-71

Бо ҳуқуқи дастнавис

**ИСМОИЛЗОДА АБДУЛМАҶИД ШЕРАЛӢ**

# ТАЪРИХИ ТАШАККУЛ ВА РУШДИ НАЗАРИЯИ АДАДҲОИ СОДА

**ДИССЕРТАТСИЯ**

барои дарёфти дараҷаи илмии номзади илмҳои физикаю математика аз рӯйи ихтисоси 1.1.1. Таърихи илму техника (математика)

**Роҳбари илмӣ: Сатторов Абдурасул Эшбекович,**
доктори илмҳои педагогӣ, профессор

**Бохтар - 2026**

**МУНДАРИҶА**

# МУҚАДДИМА

**Мубрамии мавзуи таҳқиқот.** Маълум аст, ки солҳои охир ба омӯзиши фанҳои дақиқу риёзӣ диққати зиёд дода мешавад, зеро ин фанҳо дар омӯзиши дигар фанҳо, дар омодакунии мутахассисон дар самти техникаву технология, инчунин ҷиҳати тайёр намудани коркунони соҳаи саноат, ки ин раванд ҳамчун стратегияи чоруми рушди миллӣ эълон гардидааст, нақши муҳим мебозанд. Дар ин замина, аз тарафи Пешвои миллат, Президенти мамлакат маҳтарам Эмомалӣ Раҳмон фармони №1445, аз 31 январи соли 2020, дар бораи «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» эълон намудани солҳои 2020-2040 ба тасвиб расид.

Илми математика дар байни илмҳои мавҷуда ҷойи муҳимро ишғол менамояд, зеро роҳу усулҳои математикӣ дар ҳалли масъалаҳои илмҳои мухталиф имконияти васеъро таъмин менамояд.

Математика ҳамчун илм таърихи қадима дорад. Дар ҳақиқат инсон аз рӯзҳои аввали фаъолияташ ба ҳисобу китоб, ченкунӣ, муайянкунии масоҳату ҳаҷмҳои ҷисмҳои гуногун ниёз дошт ва ин ҳолат имрӯзҳо низ мушоҳида мешавад. Аввалин объекти ин илм ададҳо буда, имрӯзҳо чун назарияи ададҳо дар таҳқиқоти муосир нақши бориз дорад.

Назарияи ададҳо аз рӯи имконияти истифодашавиаш дар соҳаҳои мухталиф яке аз қисмҳои муҳимии илми математика аҳамияти хоса дорад.

Ададҳои сода дар маҷмуи ададҳои натуралӣ, ки ҳамчун ададе, танҳо ба адади 1 ва ба худаш тақсим мешаванд, аз қадим манбаи омӯзиш буданд, ҳамчун мисол «Ғалбери Эратосфен»-ро овардан мумкин аст.

Омӯзиши осори риёзидонони олам доир ба ададҳои сода дар ташаккули ҷаҳонбинии таърихӣ-илмӣ ва махсусан донишҳои математикии хонандагону донишҷӯёни муассисаҳои таҳсилоти миёнаи умумӣ (МТМУ) ва хусусан муассисаҳои таҳсилоти олии касбӣ (МТОК)-и равияи табиатшиносию риёзӣ ва техникӣ таъсири мусбат расонида, барои омӯзиши хосиятҳои муайянкунии ададҳои сода мавқеи хосаеро ишғол мекунад.

Дар даври истиқлолияти давлатии кишвар таҳқиқи масъалаҳои зиёди бо ададҳои сода рабтдошта аз тарафи олимони мамлакат иҷро гардида истодааст ва натиҷаҳо дар миқёси берун аз ҷумҳурӣ низ эътироф мегардад. Вале, ягон рисолае таҳия нагардидааст, ки аз замони қадим корҳо аз рӯи назарияи ададҳои сода ва дар солҳои истиқлолияти ҷумҳурӣ оид ба ин самт бахшидашуда бошад ва ин ҳолат ба омадакунии рисолаи мазкур ҳидоят намуд.

**Дараҷаи коркарди илмии проблемаи мавриди омӯзиш**. Омӯзиши назарияи ададҳои сода аз замонҳои қадим ҳамчун муаммо барои риёзидонон буда, онҳо барои муайянкунии ададҳои сода дар қатори ададҳои натуралӣ корҳои зиёдеро ба анҷом расонидаанд. Ба андешаи мо, таҳқиқоти дар ин самтбударо ба панҷ гурӯҳ тақсим кардан мумкин аст;

1) назарияи ададҳои сода ҳамчун як қисми муҳимии математикӣ буда, юнониҳои қадим яке аз аввалинҳо шуда, ба омӯзиши ин масъала машғул шудаанд, ки ин дар корҳои олимони маъруфи таърих, шарқшинос, риёзидон, таърихи илмҳо, файласуфон: А.В. Кубитский [3], И.Н. Веселовский [4], И.О. Гейберг [27], Евклид [35], Л.Я. Жмуд [36], И.Д. Рожанский [100], Д.Я. Стройк [107] ва ғайра, инчунин дар китоби «История математики» [38] инъикос ёфтааст. Масалан, математики Юнони қадим Евклид (асри III пеш аз милод) мавҷудияти маҷмуи беохири ададҳои содаро исбот кард. Ғайр аз ин, математик ва нуҷумшиноси юнонии дигар Эратосфен (солҳои 276-193 то мелод) усули одии сохтани ҷадвали ададҳои содаро пешниҳод намуд. Усули пешниҳодкардаи ӯ дар математика ба номи «Ғалбери Эратосфен» маълум аст. Ин усул аз замонҳои қадим то ин ҷониб аз ҳама беҳтарин усули муайянкуни ададҳои сода буда, бо ин усул дар замони мо бо МЭҲ зиёда то 100 миллион ададҳои содаро ҳосил намуданд;

2) дар асрҳои миёна низ назарияи ададҳои сода дар корҳои олимони форсу тоҷик, ба монанди Муҳаммад Ал-Хоразмӣ, Умари Хайём, Абурайҳони Берунӣ, Ибни Сино, Собит ибни Қурро, Ибни Ҳайсам, Муҳаммад ал-Форсӣ ва дигарон инкишоф ёфта, оид ба ин корҳои муҳаққиқон, ба монанди Н.М. Бобоев [7], П.Г. Булгаков [12], И. Ғуломов [31], М. Илолов [36], А.Қ. Қодиров [40], А.Ш. Комилӣ [48], А.Э. Сатторов [101], Г.П. Матвиевская [66], М.М. Рожанская [98], Б.А. Розенфелд [91], А.П. Юшкевич [135, 136], А.Н. Колмогоров [48], Г.С. Собиров [105], М.С. Шарипова [127] ва дигарон таҳия шудааст;

3) таҳқиқи назарияи ададҳои сода инчунин, аз тарафи олимони Аврупо П. Ферма [144], Л. Эйлер [19], М. Мерсенн [50], Х. Голдбах, А.М. Лежандр, К.Ф. Гаусс, Б. Риман [33] ва ғайра босуръат идома ёфт;

4) дар замони шуравӣ низ таҳқиқи назарияи ададҳои сода дар корҳои математикони шинохта И.М. Виноградов [20, 21, 22, 23, 24,25], Н.Г. Чудаков [122, 123], К. Каратсуба, А.А. Бухштаб [15, 16, 17], В.А. Голубев [31], Р.Ф. Файзиев [112], Б.А. Элнатанов [133-134] ва дигарон идома ёфта, онҳо дар ин самт ба натиҷаҳои назаррас ноил гардидаанд;

5) дар замони истиқлолияти давлатӣ дар ҷумҳурӣ проблемаҳои назарияи ададҳои сода инкишоф ёфта, натиҷаҳои назаррас аз тарафи олимони барҷастаи тоҷик, ба монанди академик З.Ҳ. Раҳмонов [79, 80, 81, 82, 83, 83] ва шогирдони ӯ Ҷ.А. Шокамолова [130, 131], Д.М. Фозилова [115], А.О. Раҳимов [87], Ш. Ҳ. Мирзораҳимов [67], Д.Ҷ. Хокиев [119], О.О. Нозиров [73], А.А. Собиров [106] ва дигарон таҳқиқ гардидаанд ва ин раванд алҳол низ идома дорад.

**Робитаи таҳқиқот бо барномаҳо (лоиҳаҳо), мавзуъҳои илмӣ.** Таҳқиқоти диссертатсионии мазкур мутобиқи эълон гардидани солҳои 2020-2040 «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» инчунин дар чаҳорчӯбаи нақшаи дурнамои кори илмӣ-таҳқиқотии кафедраи алгебра ва геометрияи Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав ва нақшаи дурнамои илмии

Институти илмӣ-таҳқиқотии таърихи илмҳои табииётшиносӣ ва техникаи назди ҳамин Донишгоҳ иҷро шудааст.

## ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

**Мақсади таҳқиқот** аз омӯзиши таҳқиқи назарияи ададҳои сода ва саҳми олимони тоҷик дар солҳои истиқлолият оид ба масъалаҳои назарияи ададҳои сода иборат мебошад.

**Вазифаҳои таҳқиқот**. Вобаста ба омӯзиш ва пажӯҳиши диссертатсия мақсад ва вазифаҳои мушаххас гузошта мешавад, ки барои амалишавии ҳадафи гузошташуда иҷрои масъалаҳои зерин зарур аст:

- таҳлили назарияи ададҳои сода дар осори олимони қадим;
- баррасии рушди назарияи ададҳои сода дар осори олимони форсу тоҷики асрҳои миёна;
- рушди босуръати назарияи ададҳои сода аз тарафи олимони Аврупо;
- таҳқиқи инкишофи назарияи ададҳои сода дар давраи шуравӣ;
- саҳми олимони ватанӣ дар пажӯҳиши масъалаҳои назарияи ададҳои сода дар солҳои истиқлолияти давлатӣ.

**Объекти таҳқиқот**. Осори олимони қадим, форсу тоҷики асримиёна ва Аврупо, корҳои олимони муосири ватанӣ доир ба назарияи ададҳои сода ва рушди он дар давраи истиқлолияти давлатӣ.

**Мавзуи таҳқиқот.** Аз таърихи назарияи ададҳои сода ва рушди он дар солҳои истиқлолият (1991-2020).

**Марҳала, макон ва давраи таҳқиқот**

**Марҳалаҳои таҳқиқот.** Таҳқиқоти мазкур асосан дар се марҳала гузаронида шудааст.

**Дар марҳалаи аввал** (2018-2021) – интихобу тасдиқи мавзуъ ва ҷамъоварию шиносой бо осоре, ки роҷеъ ба омӯзиши таърихи илми математика, аз ҷумла, назарияи ададҳо таҳия шудааст. Дар ин марҳала аз соли 2020 нашри мақолаҳо ва гузоришоти илмӣ оид ба мавзуъ оғоз гардида, таълифу нашри чунин мақолаҳо ва маърӯзаҳо дар ҳар се марҳала идома ёфтааст.

**Дар марҳалаи дуюм** (2021-20223) – ба ғайр аз идомаи навиштани мақолаҳову фишурдаҳои илмӣ, инчунин таснифи қисмати назариявию методии рисола мавриди баррасӣ қарор гирифтааст.

**Дар марҳалаи сеюм** (2023-2024) – нашри мақолаҳои илмӣ идома ёфта, навиштани рисола ва баррасии он дар ҷаласаи кафедраи алгебра ва геометрияи Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав ва инчунин дар семинари илмии Институти илмӣ-таҳқиқотии таърихи илмҳои табииётшиносӣ ва техникаи назди Донишгоҳ амалӣ гардида, бо дарназардошти ислоҳи эродҳои мавҷуда ба ҳимоя омода гардидааст.

**Доираи хронологии таҳқиқот** омӯзиши ададҳои сода аз замонҳои қадим то замони муосирро фарогир буда, диққати махсус ба замони муосир равона гардида, корҳои олимони тоҷик ва дастовардҳои он доир ба ададҳои содаро фаро мегирад.

**Асосҳои назариявии таҳқиқот ва аҳамияти он**. Рисола дорои арзиши илмӣ-назариявӣ ва илмӣ-таърихӣ мебошад. Маводи таҳқиқот, хулоса, натиҷа, пешниҳод ва интишороти муаллиф метавонад ҳамчун манбаи омӯзишӣ дар соҳаи математика дар муассисаҳои таҳсилоти миёнаи умумӣ ва касбии олии кишвар хизмати арзанда намоянд.

**Усулҳои таҳқиқот** аз рӯйи вазифаҳои дар назди пажӯҳиши илмӣ гузошташуда муайян карда шуданд, инҳо методҳои омӯзиш ва таҳлили маъхазҳои илмӣ, таҳлили таҳқиқоти мавҷудаи соҳавӣ оид ба масъалаи таҳқиқшаванда, методи таҳлили назарияи ададҳо (ададҳои сода) мебошанд.

**Соҳаи таҳқиқоти** диссертатсионӣ ба мазмуни шиносномаи ихтисоси 1.1.1. Таърихи илму техника (математика) мувофиқ мебошад.

**Пойгоҳи сарчашмавии таҳқиқот.** Ба сифати пойгоҳи сарчашмавӣ асосан осори олимони риёзӣ аз давраҳои қадим то муосир доир ба назарияи ададҳои сода ва роҳҳои муайянкунии он интихоб шудааст.

**Пойгоҳи асосии таҳқиқот.** Муассисаи давлатии таълимии «Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав».

**Навгонии илмии таҳқиқот аз инҳо** иборатанд:

- пайдоиш ва инкишофи назарияи ададҳои сода дар осори олимони қадим, бори аввал омӯхта шудааст;

- таҳқиқи назарияи ададҳои сода дар осори олимони форсу тоҷики асрҳои миёна;

- рушди босуръати назарияи ададҳои сода аз тарафи олимони Аврупои асрҳои XV-XVIII;

- таҳқиқи назарияи ададҳои сода дар замони шуравӣ;

- омӯзиши дастовардҳои олимони тоҷик дар замони истиқлолияти давлатӣ оид ба назарияи ададҳои сода.

**Нуқтаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда.**

- инкишофи назарияи ададҳои сода дар замонҳои қадим ва омӯзиши донишҳои назарияи ададҳои сода дар осори олимони форсу тоҷик дар асрҳои миёна;

- осори олимони Аврупои асрҳои XVI-XIX ва дастовардҳои онҳо доир ба назарияи ададҳои сода;

- таҳқиқи назарияи ададҳои сода дар замони шуравӣ;

- дастовардаҳои олимони тоҷик доир ба назарияи ададҳои сода дар замони муосир.

**Аҳамияти назариявӣ ва амалии таҳқиқот**. Маводи таҳқиқот, хулоса, натиҷа, пешниҳод ва интишороти муаллиф метавонад ҳамчун манбаи омӯзишӣ дар соҳаи математика (назарияи ададҳо) дар муассисаҳои таҳсилоти миёнаи умумӣ ва касбии олии кишвар истифода шаванд:

- натиҷаҳои таҳқиқотро ҳангоми таълифи пажӯҳишоти ҷамъбастӣ оид ба математика дар Тоҷикистон ва берун аз он, ҳангоми таълими фанни алгебра ва назарияи ададҳо ва курсҳои махсус дар МТМУ ва

МТОК-и кишвар, хусусан дар факултети математика ва риштаҳои тахассусии математикӣ метавон истифода бурд.

- натиҷаи омӯзиш метавонад дар шакли мақолаҳои илмӣ, илмию методӣ ва илмию оммавӣ, рисолаҳои хатм барои донишҷӯёну магистрантон, унвонҷӯён ва докторантони PhD барои навиштани рисолаҳои тахассусӣ истифода шавад;

- инчунин натиҷаи кор барои омӯзгорони МТМУ ва устодону омӯзгорони МТОК-и олии кишвар манфиатовар хоҳад буд;

- аз натиҷаи таҳқиқот, албатта, дар навиштани монографияҳо ва маҷмуаҳои тахассусӣ муҳаққиқони соҳаи математика метавонанд васеъ истифода баранд.

**Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо**. Асоси методологии диссертатсияро принсипи риёзӣ, таҳлили назарияи ададҳои сода, ташаккули донишҳои математикӣ ташкил намуда, имконият медиҳад, ки далелҳои математикӣ вобаста ба таҳқиқи ҳосилкунии маҷмуи ададҳои сода аз қатори ададҳои натуралӣ дар фанни математика (назарияи ададҳо) баррасӣ гарданд. Ҳамзамон дар ҷараёни таҳқиқот методҳои гуногуни ҳосилкунии ададҳои сода аз қатори ададҳои натуралӣ баррасӣ шудаанд.

**Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ.**

Таҳқиқи илмии диссертатсияи мазкур комилан ба шиносномаи ихтисоси 1.1.1 «Таърихи илм ва техника (математика), яъне омӯзиш, пажӯҳиш, таҳлил ва шарҳи донишҳои риёзӣ мувофиқат мекунад.

**Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот.** Натиҷаҳои таҳқиқот дар шакли гузориш дар семинару ҷаласаҳои кафедраи алгебра ва геометрияи Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав ва дар семинари илмии Институти илмӣ-таҳқиқотии илмҳои табииётшиносӣ, риёзӣ ва таърихи илму техникаи назди Донишгоҳ, дар конференсияҳои ҷумҳуриявию байналмилалӣ дар донишгоҳҳои Бохтар, Хуҷанд, Кӯлоб, Душанбе ва дар шаҳри Қазон (Федератсияи Россия) баррасӣ гардидаанд. Бахше аз натиҷаҳои пажӯҳишот инчунин муҳокима гардидаанд.

**Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия.** Мундариҷаи асосии рисола дар шакли мақолаҳои илмӣ дар маҷаллаҳои эътирофгардидаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон, КОА-и Вазорати маориф ва илми ФР ва инчунин дар дигар маҷаллаву маҷмуаҳои илмӣ дар шаҳрҳои Душанбе, Хуҷанд, Кӯлоб, Бохтар ва Қазон (ФР) ба нашр расидааст.

Диссертатсия дар кафедраи алгебра ва геометрияи Донишгоҳи давлатии Бохтар ба номи Носири Хусрав ва дар ҷаласаи васеи Институти илмӣ-таҳқиқотии илмҳои табииётшиносӣ, риёзӣ ва таърихи илму техникаи назди Донишгоҳ баррасӣ ва ба ҳимояи кушод тавсия гардидааст.

**Интишорот аз рӯи мавзуи диссертатсия**. Аз 22 интишороти умумии муаллиф оид ба натиҷаҳои таҳқиқот 6 мақолаи илмии дар маҷаллаҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон, 1 дастури таълимӣ, 1 ёрии методӣ ва боқимонда дар дигар нашрияҳо ба чоп расида, маводи конференсияҳои илмиро ташкил додаанд.

**Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия**. Таҳқиқоти диссертатсионӣ аз бахшҳои «Муқаддима», «Тавсифи умумии кор», 3 боб, 7 параграф, бахши «Хулосаҳо», «Натиҷаҳои асосии илмии диссертатсия» ва «Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо», «Феҳристи рӯйхати адабиёт ва таълифоти истифодашуда» иборат аст.

Ҳаҷми умумии диссертатсия аз 192 саҳифаи матни компютерии бо ёрии протсессори матнии Microsoft Word ҳарфчинишуда иборат буда, фарогири 7 расму 15 ҷадвал ва рӯйхати адабиёти иборат аз 159 номгӯй мебошад.

# БОБИ I. НАЗАРИЯИ АДАДҲОИ СОДА ДАР ОСОРИ ОЛИМОНИ ТОҶИКУ ФОРС

## 1.1. Пайдоиш ва рушди назарияи ададҳо (ададҳои сода)

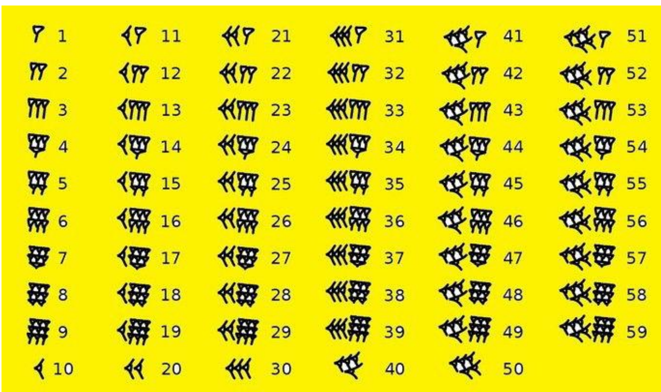
Рақамҳо, чи тавре таърихдонон иттилоъ медиҳанд, зиёда аз 30 000 сол пеш, вақте ки одамон ашё ва ҳайвонотро ҳисоб мекарданд, пайдо шудаанд. Вақте ки онҳо зарурати ҳисоб кардани он чизеро, ки шикор кардаанд ё гирифта буданд, ҳис мекарданд, мардону занони ибтидоӣ дар деворҳо барои нишон додани шумора ҳайвонотро ранг мекарданд. Бо мурури замон одамон дар гурӯҳҳои калон, қабилаҳо муттаҳид шуданд ва ҳар кадоми онҳо тарзи ҳисобкуниро инкишоф медоданд.

Аммо аломатҳои рақамҳо хеле дертар пайдо шуданд: онҳоро шумерҳо, қавме, ки 3000-2000 сол пеш аз милод дар Байнаннаҳрайн (Ироқи ҳозира) зиндагӣ мекарданд, ихтироъ намудаанд.

Аз ин рӯ, инкишофи рақамҳоро як кас ё як халқ не, балки якчанд халқ ихтироъ кардаанд. Дар зер мо мебинем, ки рақамҳо дар қадим чӣ гуна пайдо шудаанд ва бобулиён, римиён, ҳиндуҳо ва арабҳо – халқҳое, ки ба тарзи истифодаи рақамҳои имрӯза бештар таъсир расонидаанд, кадом тарзи ҳисобкуниро истифода мебурданд.

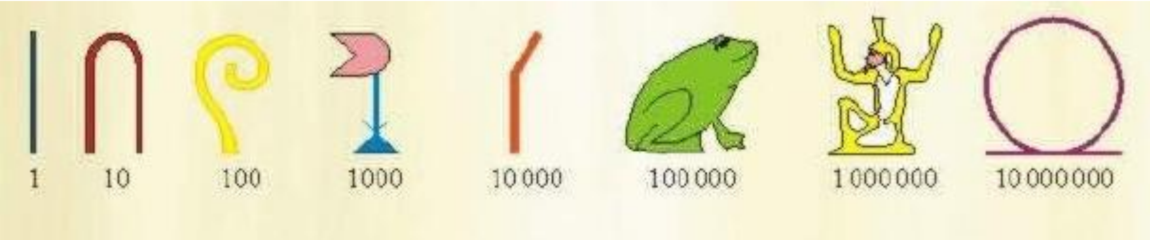
Аз лаҳзае, ки одамон ба ҳаёти муқимӣ шуруъ карданд, яъне дар замин барои кишту кор қарор гирифтанд ва ҳайвонотро хонагӣ карданд, ба одамон лозим омад, ки роҳҳои ҳисобро пайдо кунанд. Ин аз он сабаб рӯй дод, ки онҳо бояд шумораи ҳайвоноти худро назорат кунанд. Ҳамин тавр, онҳо худро ба объектҳо алоқаманд карданд. Масалан, ҳар як ҳайвон як санг арзиш дошт. Вақте ки чорворо ба чарогоҳ мебароварданд, ба халта санги ба ҳар чорво мувофиқро мегузоштанд. Дар охири рӯз, вақте ки ҳайвонҳо ба хона мегаштанд, сангҳои дар халтабударо шумурдан кифоя буд, то бифаҳманд, ки ҳамаи чорво дар он ҷо ҳастанд ё баъзе аз онҳо гум шудаанд. Онҳо инчунин нишонаҳоеро истифода мебурданд, ки дар шохаҳои дарахт ё устухонҳои ҳайвонот нишон дода шудаанд. Як зарба ба як объект, ду зарба - ду объект ва ғайра мувофиқат мекард. Ин усулҳо барои миқдори кам хуб буданд. Вале вақте ки, шумораи бисёр чизҳоро ҳисоб кардан лозим омад, кор боз ҳам мураккабтар шуд. Яке аз роҳҳои осон кардани ҳисоб, яъне миқдори калон ин гурӯҳбандии объектҳо дар ҳар даҳ воҳид буд. Ин аз он сабаб рӯй медиҳад, ки мо дар дастҳоямон даҳ ангушт дорем.

*Таърихи рақамҳои Бобул.* Вақте ки деҳаҳо ба шаҳрҳо ва шаҳрҳо ба империяҳо табдил ёфтанд, савдои байни халқҳо афзоиш ёфт ва сабтҳои дақиқтар зарур шуданд. Ин ҳолат дар яке аз тамаддунҳои бузурги Бобул, ки соли 1792 пеш аз милод империя бунёд кардааст, рӯй дод. Соли 539 милодӣ, дар ҳудуди Эрон ва Ироқ барои назорат кардани андозҳо ва тиҷорат байни минтақаҳои салтанат, халқҳои Бобул системаи ҳисобкуниро такмил доданд. Онҳо қиматҳоро бо рамзҳо навиштанд ва инҳо вобаста ба маблағи сабтшуда мавқеъҳои гуногунро ишғол мекарданд, ҳамон тавре ки мо имрӯз мекунем. Охир, вақте ки мо 14 менависем, он ба 41 баробар нест, гарчанде ки мо 1 ва 4-ро истифода мебарем. Ин намуди ҳисоб ба инсонҳо ҳисобкуниро осон кард, зеро барои навиштани ададҳои хеле калон зарурати ихтироъ кардани рамзҳои нав набуд. Рақамҳои Бобулӣ бо истифода аз хатти мех, яъне каҷ навишта мешуданд, ки асбоби кунҷдоре буд, ки дар гил нақш карданро имкон медод. Биёед як мисолро дида бароем:




Расми 1. Рақамҳои Бобулӣ ва мувофиқати онҳо ба рақамҳои ҳиндуи арабӣ.

Мисриёни қадим низ рақамҳоро истифода мебурданд, ба ин папируси риёзии Райнд, ки ба номи мисршиноси англис, ки соли 1858 дар шаҳри Луксори Миср ба даст овардааст, шаҳодат медиҳад.




Расми 2. Навишти ададҳои мисри қадим.

Дар папирус 84 масъалаи математикӣ бо ҳалли онҳо мавҷуд аст. Тибқи як ҳуҷҷати таърихӣ, мисриён системаи рақамҳоро истифода мебурданд, ки дар он рақам аз рӯи ҷамъи арзишҳои рақамҳо муайян карда мешуд. Иероглифи алоҳида барои нишон додани баъзе рақамҳо (1, 10, 100 ва ғайра) пайдо шуд. Ҳангоми навиштани адад ин иероглифҳо ҳамон қадар навишта мешуданд, ки дар он адади воҳидҳои дараҷагӣ мувофиқ мавҷуд буданд.

*Таърихи рақамҳои римӣ.* Дар ҳоле ки бобулиён рамзҳоро истифода мебурданд, римиён ҳарфҳоро барои ифода кардани рақамҳо истифода мебурданд. Онҳо ҳарфи «I»-ро барои аз 1 то 3 ҳисоб мекарданд ва баъд миқдориҳоро ба панҷ як, панҷ даҳ, сад ва ҳазор гурӯҳбандӣ мекарданд. Масалан, бо омезиши ҳарфҳо, қимати ададҳоро чунин менависем.

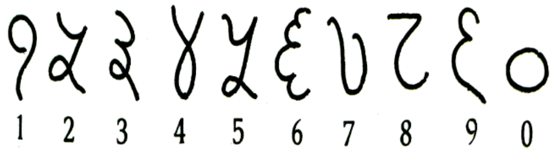
| Навишт | Адад |
|---|---|
| Я | 1 |
| V | 5 |
| X | 10 |
| L | 50 |
| Ç | 100 |
| M | 1000 |

Ҷадвали 1.

Ҳатто имрӯзҳо, рақамҳои римӣ дар ҳаёти мо мавҷуданд, ки бобҳои китобҳо ё асрҳоро ифода мекунанд. Дар рақамҳои римӣ, тартиби ҳарфҳо барои таркиби рақамҳо муҳим буд. Агар мо ҳарфи «I»-ро пеш аз «X» гузорем, мо «IX»-ро мегирем ва рақами нуҳро менависем. Аммо, агар мо

«I» -ро пас аз «X» гузорем, мо «XI»-ро ҳосил мекунем ва рақами ёздаҳро ба даст меорем. Рақамҳои римӣ барои ҳисоб кардан хуб буданд, аммо на барои ҳисобҳо. Аз ин рӯ, онҳоро рақамҳои ҳинду арабӣ иваз карданд.

*Пайдоиши рақамҳои ҳинду арабӣ.* Рақамҳои ҳинду арабӣ шакли навиштаест, ки мо имрӯз истифода мебарем. Онро ҳиндуҳо офаридаанд ва аз ҷониби арабҳо дар тамоми ҷаҳони ғарбӣ паҳн шудаанд. Аз ин рӯ, онро ҳинду арабӣ меноманд. Ҳиндуҳо низомеро таҳия кардаанд, ки дар он ҳар як адад рамз буд ва барои ҳар як гурӯҳи ашё навиштани аломати алоҳида лозим набуд, мисли мисриён.




Расми 3.

Мисли бобулиён, рақамҳо вобаста ба арзишашон мавқеъҳои гуногунро ишғол мекарданд. Яке аз муҳимтарин риёзидони Осиёи Миёна Ал-Хоразмӣ (тақрибан солҳои 780-850) умр ба сар бурдааст. Ал-Хоразмӣ чанд асари ҳиндуиро ба арабӣ тарҷума кард ва онҳо ба воситаи ҷануби Испания, ки зери ҳукмронии мусулмонон буд, ба Аврупо омаданд. Яке аз онҳое, ки ин системаи қиматҳоро ба ҷаҳони насронӣ ворид кард, Поп Силвестри II буд, ки осори риёзидонҳои исломиро меомӯхт. Аз он вақт инҷониб рақамҳои арабӣ ва ҳиндуӣ Аврупоро забт карданд ва ба усули навиштани рақамҳо қариб дар тамоми ҷаҳон табдил ёфтанд [67, с. 129].

Ғайр аз ин, асари ба номи «Арифметика» оид ба рақамҳои ҳиндии Ал -Хоразмиро математики итолиёвӣ Леонардо Пизански (Фибоначчи) ба лотинӣ тарҷума кард, ки дар Аврупо маълум гардид. Матни Фибоначи дар Аврупо нақши ҳалкунанда бозид, ки системаи сабти рақамҳои арабӣ ва ҳиндӣ дар Ғарб маълум гашт.

Дар замони муосир ҳисобҳои одӣ ба ададҳо бо номи арифметика маълум буда, калимаи арифметика аз калимаи юнонии arithmos гирифта шуда, маънояш «рақам» мебошад. Метавон гуфт, ки арифметика илми ададҳо ва амалҳо бо онҳост. Арифметика дар кишварҳои Шарқи Қадим: Миср, Бобул, Байнаннаҳрайн (Ироқи ҳозира), Чин ва Ҳиндустон ба вуҷуд омадааст, ки донишҳои математикии ҷамъшударо олимони Юнони Қадим таҳия ва идома додаанд. Истилоҳи калимаи ададҳои натуралӣ бори нахуст дар асри VI дар китоби донишманди румӣ Боэси бо номи «Дар бораи муқаддима ба арифметика», ки осори риёзидонҳои гузаштаро ба лотинӣ тарҷума карда буд, истифода шудааст. Ададҳои натуралӣ ҳамчун асоси тамоми илми математика хизмат мекунанд. Ғайр аз ин, маҷмуи ададҳои натуралӣ ба чор қисм ҷудо шуда, мувофиқан ададҳои ҷуфту тоқ, сода ва таркибиро ташкил медиҳанд.

Назарияи ададҳои сода барои ҳама қисматҳои илми математика аҳамияти бунёдӣ дорад. Онҳо сохтори ягонагии назарияи ададҳо буда, ба монанди «зарби атомҳо» мебошанд. Ин ба теоремаи асосии арифметика вобаста аст, яъне ҳаргуна ададి бутунро, ки аз як калон аст, ба ҳосили зарби ададҳои сода бо тарзи ягона ҷудо кардан мумкин аст. Масалан, 6 = 2 × 3, яъне ин ҳосили зарби ду адади сода аст; 20 = 2 × 2 × 5. Аз ин рӯ, аксар проблемаҳои ададҳои бутунро ба проблемаҳои ададҳои сода табдил додан мумкин аст – ҳамон тавре, ки баъзе масъалаҳои химиявиро барои ҳал намудан бо таркиби атомии элементҳои кимиёвии дар система иштирокдошта, ҳал кардан мумкин аст.

Адади сода ин ададҳои бутунест, ки аз як калон буда, танҳо ба як ва ба худаш тақсим мешавад. Ҳамин тавр, 6 адади сода нест, зеро он метавонад, ҳамчун ҳосили зарби 2 × 3 бошад ва 5 адади сода аст, зеро ягона роҳи ҷудокунии он ҳамчун ҳосили зарби ду адад 1 × 5 ё 5 × 1 мебошад. Агар якчанд танга мавҷуд бошад ва ҳамаи онҳоро дар росткунҷа ҷойгир карда натавонем, пас шумораи тангаҳо адади сода мебошад. Маҷмуи ададҳои сода беохир мебошанд, аз ҳамин сабаб, аксари математикони машҳури олам кӯшиш карданд ва то ҳол мекӯшанд, ки сири ададҳои содаро кушоянд.

Аз таърихи математика маълум мегардад, ки инсоният ба омӯзиши ададҳои сода аз замонҳои қадим машғул шудааст. Амалан дар манбаъҳои қадим олимон аз ин объекти математикӣ маълумот доштанд, вале дастовардҳои онҳо то даври мо нарасидааст. Аввалин далелҳои аниқ аз сабтҳои Папируси Миср, зиёда аз 3500 сол пеш ба даст омадаанд.

Дар Папируси Райнд, дар асри II пеш аз милод, ҷадвале ҳаст, ки касрҳои намуди $\frac{2}{n}$ – ро ба воситаи суммаи касрҳои сураташон баробари як ва махраҷашон гуногун ифода мекард. Ҷудокунии касрҳое, ки махраҷашон тақсимкунандаи умумӣ доранд, аз ин шаҳодат медиҳад, ки мисриён ақалан фарқи байни ададҳои сода ва таркибиро медонистанд.

Евклид (солҳои 325-265 пеш аз мелод)

Юнониҳои қадим яке аз аввалинҳо шуда ба омӯзиши ададҳои сода машғул гардидаанд. Аз ҷумла, математики қадими юнонӣ Евклид (солҳои 325-265 пеш аз мелод) мавҷудияти маҷмуи беохири ададҳои содаро исбот кард [35, с. 89].


Эратосфен
(солҳои 276-193 то мелод)

Аз давраи қадим аксар олимони соҳаи математика ба масъалаи ёфтани формулаи умумии ададҳои сода, барои ҳамаи қиматҳои адади натуралии $n$, машғул буданд. Якчанд мисолҳо меорем.

*а) «Ғалбери Эратосфен» ва такмили он.* Тарзи одии сохтани ҷадвали ададҳои сода ва усули қадимтарин дар Юнон ба олими математик ва астроном Эратосфен (солҳои 276-193 то мелод), ки дар шаҳри қадимаи Кренаки зиндагӣ мекард, вобастагӣ дошт.

Усуле, ки Эратосфен пешниҳод кард, чунин аст: «фарз мекунем, ки сохтани ҷадвали ададҳои сода то ба адади 50 талаб карда шавад. Пайдарпаии ададҳои натуралии аз 1 то 50-ро навишта мебароем ва аз байни онҳо ададҳои содаро бо тарзи зерин ҷустуҷӯ мекунем (дар болои ададҳои таркибӣ хат зада мешавад)» [71, с. 14]:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |

Ҷадвали 2.

Аввалин адади аз 1 калони ин қатор, адади 2 аст. Ин адад танҳо ба 1 ва ба худаш тақсим мешавад, пас вай сода аст.

Дар ҷадвал ба ғайр аз худи 2 ҳамаи ададҳои ба 2 каратибударо (чун ададҳои таркибӣ) хат мезанем. Баъди 2 аввалин адади хатназада, адади 3 аст. Вай ба 2 тақсим намешавад (дар аски ҳол онро бояд хат занем). Бинобар ин, адади 3 танҳо ба 1 ва ба худаш тақсим мешавад, аз ин сабаб вай ҳам адади сода аст. Дар ҷадвали ададҳо ба ғайр аз худи 3 ҳамаи ададҳои ба 3 каратиро хат мезанем. Аввалин адади пас аз 3 меомадагии хатназада, адади 5 аст. Вай ба 2 ва 3 тақсим намешавад (дар акси ҳол онро бояд хат мезадем). Бинобар ин, 5 танҳо ба 1 ва ба худаш тақсим мешавад, аз ин сабаб вай ҳам адади сода аст ва ҳоказо. Дар мисоли мо баъди хат задани амали чорум фақат ададҳои сода мемонад.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |

Ҷадвали 3.

Ин намуди ҷудокунии ададҳои сода аз қатори ададҳои натуралӣ ба олими Юнони қадим Эратосфен Киренский (асрҳои III-II то мелод) тааллуқ дорад ва ҳанӯз аз замони ҳаёт будани ӯ онро «Ғалбери Эратосфен» меномиданд. Эратосфен дар замони худ ададҳоро бо мум ба тахтача навишта, ададҳои таркибиро бо сӯзанак сӯрох карда аст, дар натиҷа сӯрохиҳо ҳосил шуданд. Тахтача ғалберро ба ёд меорад, чунки дар вай ҳамаи ададҳои таркибӣ вақти ғалбер кардан партофта мешавад, фақат ададҳои сода мемонад. Эратосфен ҷадвали ададҳои содаро фақат барои ададҳои аз 1 то 1000-ро овардааст. Дар замони муосир дар ҷадвали ададҳои сода зиёда аз 100 000 000 адад мавҷуд аст [15, 30].

«Ғалбери Эратосфен» аз вақти пайдоишаш дар ҳамаи китобҳои доир ба арифметика ҳамчун намуди амалии ёфтани ададҳои сода дида баромада мешуд. Эратосфен дар соли 276-и пеш аз солшумории мо дар шаҳри Киренаи Африка таваллуд шудааст. Майли ӯ ба азхудкунии илм дар соли 260-и то мелод ӯро ба Афина овард ва дар он ҷо бо Евклид (асрҳои IV-III то мелод), Аполлони (солҳои 260-170 то мелод) кору фаъолият намуда, ба Архимед (солҳои 287-212 то мелод) муносибати дустӣ дошт [133, с. 5]. Вай ба фалсафа, математика, география, шоирӣ машғул буда, илмҳои антиқиро меомӯхт. Дӯстон ва ҳамкоронаш бинобар сабаби муваффақиятҳои ба даст овардааш ӯро «пентатлос»-варзишгари 5 ҳарба меномиданд, ки муваффақиятҳои бузургро дар соҳаҳои гуногун ба даст оварда, вале ягонтои онҳо «ба қуллаҳои баланд» набудааст. Мумкин аст, бинобар ҳамин, ӯро ба мақоми «бета» (рақами ду) ном мебурданд. Ин лақаб инчунин бо он шарҳ дода мешавад, ки вақте ӯро назикии 50 - сола буданаш ба қалъаи Птоломей (асри III пеш аз мелод) ба сифати мураббияи вориси тахт даъват намуданд, ҳамчун одами дуюм аз рӯи ҳисоб ба вазифаи китобдори китобхонаи бузурги Александрия қабул намуданд. Эратосфен дар охири ҳаёташ нобино шуда, бо марги «философҳо» (худкушӣ) аз дунё гузашт. Аз рӯи маълумоти дигар ӯ аз гурустнагӣ дар солҳои 194 ё ин, ки 196 то мелод вафот кардааст. Мероси илмии Эратосфен боқӣ намондааст. Дар бораи дастовардҳои илмии ӯ аз китобҳои нисбатан баъдтар воқиф шудаанд [133, с. 6].

Аввалин маълумот оид ба «Ғалбери Эратосфен» дар китоби Никомах Геразский (асри I пеш аз мелод) «Муқаддима ба арифметика», ки имконияти истифодаи «Ғалбери Эратосфен»-ро дар пайдарпаии ададҳои тоқ ва таърифи ҳамаи ададҳои сода ба ғайр аз 2 нишон медиҳад, вомехӯранд. Аз он ки Никомах ададҳои содаро бо пайдарпаии ададҳои тоқ муайян карда буд ва ин боиси сарзаниши муаррихон гардид, маълум шавад, ки Эратосфен фақат бо ададҳои натуралӣ амал мекард.

*Қадамҳои асосӣ дар такмил додани усули «Ғалбери Эратосфен».* Дар асрҳои миёна ҳангоми муайян кардани ададҳои сода аз «Ғалбери Эратосфен» ва тағйироти он истифода менамуданд: «Аввалин қадамҳои такмили усули «Ғалбери Эратосфен»-ро математики итолиёвии асри XI Леонардо Пизански (солҳои 1170-1250) гузошт. Ӯ дар китоби худ «Китоби аббаки», ки соли 1202 нашр шудааст, дар фосилаи аз 11 то 97, яъне 21 адади содаро муайян намуда, нишон додааст, ки амалиёти хат задани рақамҳо бояд аз қисми бутуни адади решаи калонтарин зиёд набошад» [133, с. 7].

Ҳамин тариқ, дар асри XIII тағйироти зерини «Ғалбери Эратосфен» ба вуҷуд омад:

а) дар пайдарпаии ададҳои натуралии 2, 3, 4. 5, 6, ..., n адади аввалине, ки хат зада нашудааст, адади сода мебошад; $2, 3, \cdots, p_r$

б) ҳангоми хатзанӣ ададҳои каратӣ то $\sqrt{n}$ ба ҳисоб гирифта мешавад. Ададҳои хатзаданашуда ададҳои сода мебошанд.

«Ғалбери Эратосфен» ҳамеша диқати математиконро бо худ ҷалб мекард, эҳтимолан сабабаш на танҳо нодир будани тарзи ёфтани ададҳои сода, балки муайян кардани ададҳои сода дар фосилаи аз 1 то n мебошад,

$$\pi(n) = \sum_{p \leq n} 1,$$

ки дар ин ҷо $p$ –адади сода, тарзи муайян кардани тақсимкунандаҳои содаро маънидод мекунад.

## 1.2. Нақши олимони тоҷику форс дар кашфи назарияи ададҳои сода

Маълум аст, ки дар асрҳои миёна олимон дар аксар соҳаҳои илмҳои табиӣ, дақиқ ва риёзӣ ба дастовардҳои зиёд ноил гаштаанд ва масъалаҳои зиёди соҳаи математика вобаста ба омӯзиши ҳаракати ҷисмҳои осмонӣ буданд. Аз ин рӯ, астрономия дар замони қадим ва асрҳои миёна инкишоф ёфта, бо математика зич алоқаманд аст. Барои ҳалли проблемаҳои астрономӣ ба олимон мисолҳои ҳисоббарорӣ лозим буд, ки натичаҳои дурусттаринро пайдо намоянд. Баробари инкишофи илм талабот ба дурустии ҳисобҳо зиёд шуд ва ин табиист, ки бо инкишофи (аппарати) математикӣ амалӣ гардид. Ҳамин тариқ, дар асрҳои миёна омӯзиши астрономия омили муҳимми пешравии соҳаи математика ба ҳисоб меравад.

Хусусияти арифметикӣ ва ҳисоббарорие, ки аз қадим ба математикаи Шарқ хос буд, ба ташаккули техникаи иҷрои амалҳо бо ададҳо, ки бо мурури замон зиёд мешуд, мусоидат кард. Системаҳои гуногуни рақамӣ, асосан даҳӣ истифода мешуданд. Яке аз комёбиҳои барҷастаи илмӣ, ки маҳз бо арифметика алоқаманд аст - аз тарафи олимони Ҳиндустон ба вуҷуд овардани системаи шумораҳои даҳ (десятичная позиционная система) буд. Он тақрибан 500 шакл гирифт. Лаҳзаи ҳалкунанда дар ин ихтирои сифр буд. Амалҳои арифметикӣ, махсусан зарб ва тақсим, хеле сода карда шуданд. Бо тафсири геометрии миқдорҳое, ки дар он ҳукмрон буданд, ҳалли масъалаҳои мураккабтар, кор карда баромадани усулҳои мувофиқи ҳалли муодилаҳо, мураттабсозии мафҳумҳои адади ирратсионалӣ ва адади манфии ба математикаи юнони қадим бегона имконпазир гардид.

Ҳинду Хитой, инчунин Юнони Қадим, пеш аз ҳама, олимони мамлакатҳои Шарки Наздик ва Миёна, ки ба ҳайати Хилофати Араб дохил шуданд, ворисони мероси илмӣ буданд. Асосан дар давоми асри VII қабилаҳои араб, ки дар нимҷазираи Арабистон зиндагӣ доштанд, халқҳои ҳамсояро забт карданд. Дере нагузашта ҳукмронии онҳо аз доманаҳои Ҳимолой то нимҷазираи Пиреней, аз ҷануби баҳри Миёназамин то биёбонҳои Пасикаспӣ (Закаспий) масоҳатҳои васеъро фаро гирифт. Истилоҳҳо дар зери байрақи дини нав - ислом ба амал меомаданд. Забони ин дин - арабӣ ҳам забони давлатӣ ва ҳам забони асосии илмӣ гардид. Дар асрҳои VII–XV маданият ва илми кишварҳои исломӣ инкишоф ёфта, ривоҷ кард. Чи тавре академик Б. Ғафуров қайд менамоянд: «Олимони ин давра дар ҳар як соҳаи илму фан ниҳоят зиёданд ва бинобар ин мо фақат бо зикри номи барҷастатарини онҳо иктифо менамоем» [11, с. 434]. Дастовардҳоро на танҳо арабҳо, балки намояндагони кишварҳое, ки арабҳо забт карда буданд, пеш аз ҳама, кишварҳои Осиёи Марказӣ низ ба даст оварданд. Саҳми олимони Осиёи Марказӣ хеле калон ва дар баъзе соҳаҳо ҳалкунанда буд.

Дар хилофати араб, инчунин дар бисёр давлатҳои мусулмон, ки дар натиҷаи ҳуҷуми туркҳо ва муғулҳо ҷои онро гирифта буданд, инчунин дар бисёр давлатҳои мусулмонӣ, ки аксар вақт якдигарро иваз мекарданд, масъалаҳои обёрӣ, сохтмон, корвонҳо ва савдои баҳрӣ аҳамияти ҳаётан калон доштанд. Ҳалли онҳо инкишофи астрономия ва математикаро талаб мекард. Шоҳони бомуваффақият расадхонаҳо ташкил карданд, ки ба марказҳои инкишофи илмҳои дақиқ табдил ёфтанд. Онҳо асарҳои олимони Ҳиндустон ва хусусан Юнони Қадимро меомӯхтанд, ба арабӣ тарҷума мекарданд ва шарҳ медоданд. Дар баробари ин, пешравиҳои назарраси минбаъда, пеш аз ҳама, дар арифметика, алгебра ва тригонометрия ба даст оварда шуданд. Дар ин кор бисёр олимон иштирок карданд. Дар бораи фаъолияти баъзе аз намоёнтарин олимони ин давра мухтасар маълумот пешниҳод менамоем.

Асарҳои Муҳаммад ал-Хоразмӣ (787‒850) барои инкишофи минбаъдаи математика аҳамияти калон доштанд. Ватани ӯ давлати Хоразм дар Осиёи Миёна буд. Ба шарофати дониши худ дар «Хонаи хирад»-е, ки халифаҳо дар Бағдод сохта буданд, мавқеи намоёнро ишғол намуд. Дар ин ҷо ӯ математик ва ситорашиноси пешқадам буд. Асарҳои ал-Хоразмӣ оид ба арифметика ва алгебра номи ӯро абадӣ гардонданд [12].

Муҳаммад ал-Хоразмӣ (787——850)

Китоби Ал-Хоразмӣ «Китоб ҳисоб-ул-Ҳинд» дар Шарқи Араб аввалин китобе буд, ки дар он арифметика дар асоси системаи шумораҳои касрҳои даҳӣ пешниҳод шудааст. Бо китоби худ ӯ дар паҳншавии босуръати ин система дар саросари ҷаҳони араб, то иёлоти Мавриёни Испания саҳм гузоштааст. Дар асри XII китоб ба забони лотинӣ тарҷума шуд ва арифметикаи ҳиндӣ дар Аврупои Ғарбӣ бо номи алгоризма ё алгоритм (аз шакли лотинии номи муаллиф) маълум шуд. Аз охири асри XV дар ин ҷо китоби ӯ машҳур гардид. То ин вақт, аз ҷумла, ба шарофати чопи китоб сабти рақамҳо ягона карда шуда буд (дар кандакории А. Дюрер «Меланхолия», ки аз соли 1514 мебошад, намуди зоҳирии ба мо шиносро дорад). Дар муддати тулонӣ, ин рақамҳо чандон бомуваффақият «арабӣ» номида нашудаанд. Дар айни замон, алгоритмро дастури дақиқ барои ҳалли як синфи муайяни масъалаҳо меноманд. Аҳамияти ин консепсияро аз ҳад зиёд баҳо додан мумкин нест. Он дар математика, дар татбиқи он, дар ҳаёти ҳаррӯза васеъ истифода мешавад.

Ал-Хоразмӣ бо асари худ «Китоб ал-ҷабр ва-л-муқобала» ба ташаккули ин шохаи риёзиёт, ки алгебра ном дошт (аз калимаи мувофиқ дар номи китоб) замина гузошт. Амалиёти ал-ҷабр (пур кардан) маънои ҳадҳои тарҳшудаи муодиларо ба ҳадҳои ҷамъшудаи интиқоли қисми дигари онро мефаҳмонад; ал-муқобала (муқобил) - ихтисори аъзои баробар дар ҳарду қисм. Ин амалиётҳо имкон доданд, ки ҳама гуна муодилаи дараҷаи якум ё дуюм ба яке аз шаш намуди каноникии дар китоб баррасишуда ихтисор карда шавад. Барои ҳар як намуд муодила ал-Хоразмӣ танҳо қоидаи ёфтани решаҳои мусбати муодилаҳоро медиҳад. Ал-Хоразмӣ қайд мекунад, ки китоби худро барои он навиштааст, ки «ба мардум ҳангоми тақсими мерос, тартиб додани васиятнома, тақсими амвол ва дар судҳо, дар савдо ва ҳама гуна чизҳо, инчунин ҳангоми ченкунии замин, гузоштани каналҳо, дар геометрия ва дигар масъалаҳои ба ин монанд» [67, с. 129] зарур аст. Дар китоб мисолҳои зиёди ҳалли ин гуна масъалаҳо оварда шудаанд.

Энсиклопедисти машҳури Осиёи Миёна Муҳаммад ал-Берунӣ (973-1050), ҳамзамони Ибни Синои бузург дар шаҳри Қиёт, пойтахти Хоразм (алҳол ш. Берунӣ дар Қароқалпоқистон) таваллуд шудааст. Дар ин ҷо, дар маркази калони илмии он замон таҳсил ва кор мекард. Султон Маҳмуди афғон, ки соли 1017 Хоразмро забт карда буд, ӯро маҷбур кард, ки ба пойтахти худ Ғазнӣ кӯч кунад ва дар он ҷо Ал-Берунӣ ба кори олимони ҷамъовардаи Маҳмуд аз кишварҳои забтшуда роҳбарӣ мекард. Ал-Берунӣ чанд сол дар Ҳиндустони Шимолӣ, ки аз тарафи Султон забт карда шуда буд, зиндагӣ карда, дар он ҷо асарҳои илмиро ба забони санскрит омӯхтааст.


Муҳаммад ал-Берунӣ (973-1050)

Дар байни асарҳои сершумори ал-Берунӣ асари бузурги энсиклопедии ӯ, ки ба писари Маҳмуд – Масъуд бахшида шуда, бо номи «Қонуни Масъудӣ» маъруф аст, ҷои махсусро ишғол мекунад. Ба ғайр аз астрономия, хронология, ҷуғрофия ва дигар илмҳои табиатшиносӣ ба тригонометрия диққати калон медод – инкишофи он дар асарҳои пешгузаштагони сершумори ал-Берунӣ ҷамъбаст карда шудааст. Вай, ки «аз баҳри фалсафаи Юнону Ҳиндустони қадим гузаштааст», дар Шарқи асрҳои миёна шуҳрати беандоза пайдо кард [9, 10].

Бинобар ин, ҳар як олиме, ки дар соҳаи астрономия таҳқиқ мекард, мебоист ба математика – арифметика, алгебра, тригонометрияи ҳамворӣ ва сферикӣ ва ғайра таваҷҷуҳ зоҳир менамуд. Масалан, дар асарҳои Берунӣ вобаста ба масъалаҳои астрономӣ масъалаҳои риёзии ҳам характери амалӣ ва ҳам назариявидошта гузошта ва ҳал карда мешаванд, ҳамзамон, чи тавре муаррихони илм қайд мекунанд, аз бисёр асарҳои ӯ то 20-тоаш ба математикаи соф бахшида шудаанд, ки яке аз донишмандони риёзидони замони худ будани Берунии таъкид менамояд.

Асарҳои Беруниро астроном ва математики бузург Насируддини Тӯсӣ (1201-1274)- асосгузори расадхонаи машҳури Мароға васеъ истифода бурдааст. Дар асари худ «Китобу-ш-шакли-л-қитоъ» [111], ки дар таърихи тригонометрия нақши муҳим дошт, иқтибоси зиёд аз Берунӣ овардааст.


Насируддини Туси (1201-1274)

Шиносоии амиқ бо дастовардҳои Берунӣ дар соҳаи риёзиро ал-Кошӣ дар «Мифтоҳ-ул-ҳисоб» [2] низ нишон додааст.

Ҳамчунин, диққати муаррихони илмро асарҳои зерини Берунӣ ба худ ҷалб кардаанд: «Мақола фӣ истихрозу-л-автор фӣ-д-доира би-ҳваоссу-л-хатт ал-мунҳанӣ фиҳо», «Китобу-т-тафҳим ли авоил синоати-т-танзим», «Истиобу-л-вуҷуҳи-л мумкина фӣ санъати-лустурлоб», «Мақола фӣ рошикоту-л-Ҳинд» ва ғайра.

Доираи саволҳои риёзие, ки Беруниро ба худ ҷалб кардааст, ниҳоят васеъ буд. Онҳо бо арифметика, алгебра ва назарияи ададҳо, геометрия, тригонометрия, география, геодезия, масъалаҳои амалии ба астрономия, картография, хронология ва ғайра марбут мебошанд.

Берунӣ дар ду боби аввали «Китобу-т-тафҳим ли авоил синоати-т-танзим» курси ибтидоии риёзиётро, ки арифметика, алгебра ва геометрияро дар бар мегирад, мухтасар баён карда, ба мафҳумҳои асосии риёзӣ, ки барои астрономия заруранд, таъриф додааст, ки дар бобҳои минбаъда пешниҳод карда мешаванд.

Олим дар асарҳои дигар масъалаҳои гуногуни арифметика, алгебра, геометрия ва тригонометрияи ҳамворию сфериро, ки вобаста ба ин ё он масъалаи ҳалкардаи ӯ ба миён меоянд, баррасӣ мекунад. Инчунин, боби сеюми «Қонуни Масъудӣ», ки ба тригонометрия бахшида шудааст, далели муносибатҳои асосиеро, ки дар астрономияи ҳисоббарор истифода мешаванд, дар бар мегирад.

Дар поён баъзе натиҷаҳои дар арифметика бадастовардаи Берунӣ баён мегардад.

Арифметика дар асрҳои миёна монанди Юнони қадим, ба назариявӣ ва амалӣ тақсим мешуд.

Арифметикаи назариявии юнониёни қадим мисли дигар дастовардҳои илмии онҳо ба олимони Шарқи асримиёнагӣ мерос монда, ба он таваҷҷуҳи зиёд зоҳир намуда, аз он як қатор теоремаҳои муҳимро оид ба ададҳои бутун гирифтанд. Арифметикаро ҳисоб ан-назарӣ ё ал-арисматика меномиданд.

Берунӣ дар «Китобу-т-тафҳим ли авоил синоати-т-танзим» [10], пеш аз ҳама, мафҳумҳои асосии арифметикаи назариявӣ, мафҳумҳои воҳид ва ададро муайян кардааст.

Минбаъд Берунӣ ба таснифи ададҳои натуралӣ мегузарад. Ӯ ададҳоро ба ҷуфт, тоқ, ҷуфт-ҷуфт (ададҳои шакли $2^n$, ки дар он n>1), ҷуфт-тоқ (намуди $2(2k+1)$)), тоқ-тоқ-ҷуфт, (намуди $2^n(2k+1)$),) тоқ-тоқ (намуди $(2k+1)(2m+1)$ ҷудо мекунад. Ададҳои сода, таркибӣ, ададҳои байни ҳам сода, инчунин ададҳои навъҳои махсус - ададҳои комил, зиёдатӣ, нокифоя, ададҳои дӯст ва гуногунии «шаклӣ» ба назар гирифта мешаванд.

Ададҳои мукаммал ададест, ки ба ҷамъи тақсимкунандагони дурусти он (яъне аз худи адад хурдтар) баробар аст. Масъалаи дарёфти ададҳои мукаммал дар замонҳои қадим ба миён омадааст. Евклид дар китоби IX «Усул» теоремаеро исбот кард, ки адади шакли $2^{n-1}(2^n-1)$, ки дар он $2^n-1$ адади сода, адади мукаммал аст. Баъдтар нишон дода шуд, ки дигар ададҳои ҷуфти дӯст вуҷуд надоранд, ба истиснои ададҳои дар формулаи Евклид ҷойдошта.

Адади номукаммал ададест, ки ҷамъи тақсимкунандагонаш аз он адади додашуда зиёд аст. Берунӣ $12-$ ро мисол меорад; дар ҳақиқат, ин адади номукаммал, зеро $1+2+3+4+6>12$ аст.

Берунӣ бештар ба ададҳои шаклӣ диққат медиҳад, ки бинобар имкони дар шакли фигураҳои геометрӣ тасвир кардани онҳо чунин ном гирифтаанд. Инҳо, пеш аз ҳама, ададҳои ҳамвор мебошанд, ки намуди квадратӣ (шакли $n^2$), дарозрӯя (шакли n(n+1)), росткунҷа (шакли $m(n+m)$ дар он ҷо $m > 1$), секунҷа (пай дар пайии суммаи прогрессияи арифметикии 1 + 2 + 3 + =$\frac{n(n+1)}{2}$ 2 барои $n$ = 1, 2, ...) ва ададҳои дигар.

Ба ғайр аз ин, Берунӣ баъзе навъҳои ададҳои «ҷисмӣ»-ро, ки дар арифметикаи Пифагор низ мавқеи намоён доранд, дида мебароянд. Ба инҳо ададҳои «каноникӣ» дохил мешаванд, ки ӯ онҳоро ҳамчун «ҷамъи ададҳои секунҷаи пайдарпай», яъне ададҳои зеринро муайян мекунад.

$$1+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

А. Берунӣ ададҳои «пирамидавӣ»-ро ба таври зайл таъриф медиҳад: Инҳо (чоркунҷҳои пай дар пай, агар онҳоро ба шакли пирамидаи мисрӣ ҷорӣ кунед), дар болои якдигар мисли вазнҳои тарозу, хурдтар аз болои тарозуҳои калонтар, мисли зинаҳои зинапоя. Агар қадамҳо якхела баланд бошанд, инҳо пайдарпайии квадратҳо мебошанд, масалан 1, 4, 9, 16. Дар Ҳиндустон онҳоро варга санкалита меноманд. Қадамҳо метавонанд баландии гуногун дошта бошанд; инҳо суммаи пайдарпайи кубӣ мебошанд, масалан 1, 8, 27, 64; дар ҳиндӣ онҳоро «гхана санкалита» меноманд. Ба ибораи дигар, Берунӣ ду навъ пайдарпайии ададҳои пирамидаро баррасӣ менамояд:

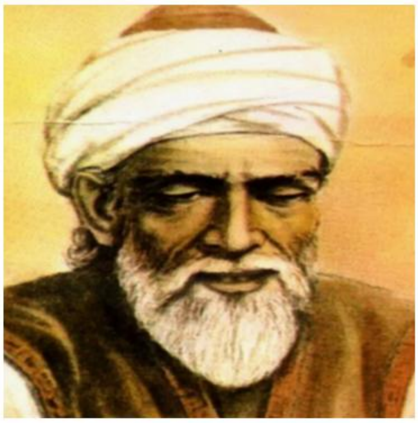
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{ё}$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \text{дар ин ҷо } n=1,2,3,\cdots$$

А. Берунӣ фасли арифметикаи назариявиро бо чунин калимаҳо ба охир мерасонад, ки хосиятҳо ва номҳои ададҳо ба мисли худи ададҳо беохиранд [69, с. 52].

Вале бояд дар хотир дошт, ки арифметикаи назариявии қадим дар рушди математика нақши калон бозида, дар асоси он илми муҳим – назарияи ададҳо ба вуҷуд омад. Вай идома медиҳад, аммо бо ёрии усулҳои мураккаби муосир, омӯзиши хосиятҳои ададҳоро олимони гузашта оғоз кардаанд [69].

Дар таърифҳои асосии назарияи ададҳои ҷуфт ва тоқ муаллифони шарқӣ бештар ба Никомах пайравӣ мекарданд. Ба қавли математик ва астрономи форсу тоҷик Абу ал-Вафо ал-Бузҷони (940-998): «адади ҷуфт ададест, ки ба ду тақсим мешавад ва ки дар байни ададҳои ҷуфт як нест; адади тоқ ададест, ки ба ду тақсим намешавад, зеро дар байни онҳо воҳид вуҷуд дорад» [67, с. 114].


Абу ал-Вафо ал-Бузҷони (940-998)

Дар мавриди таърифҳои асосии назарияи ададҳои ҷуфт ва тоқ, баъзе риёзидонҳо ба нуктаи назари Никомах риоя мекарданд, баъзеи дигар таърифҳои Евклидро такрор кардаанд. Аллакай гуфта шуда буд, ки Никомах ба таснифоти Евклидӣ тағйирот ворид кардааст, ки мувофиқи он ду синфи ададҳои ҷуфт вуҷуд дорад: ду навъи ҷуфт-ҷуфт ва навъи ҷуфт-тоқ $2^n\ (2n+1)$, ки дар он $n > 1$. Тавре ки дар масъалаи 34-уми китоби IX-уми «Усул», исбот шудааст, ин ду синф бо ҳам мепайвандад. Никомах синфи дуюмро ба ду тақсим кард: ӯ ададҳои шакли $2\ (2m+1)$ ҷуфт-тоқ ва ададҳои шакли $2^n\ (2m+1)$, ки дар он $n$ >1 аст, тоқ-ҷуфт ном гузошт.

Математикҳои Шарқ ададҳои $2^n\ (2m+1)$ – ро ҷуфт-ҷуфт-тоқ (завҷ ал-завҷ ал-фард) меномиданд.

Абуалӣ ибни Сино, Берунӣ ва муаллифи энсиклопедияи «Мафотеҳ-ул-улум» (Калидҳои илмҳо) китоби Хоразмӣ ба таснифи Никомах риоя кардаанд. Охирин таърифҳои худро бо мисолҳои ададӣ ҳамроҳӣ мекунад: Хоразмӣ «Адади ҷуфтро метавон ба ду қисми баробар тақсим кард, масалан, 4 ва 6. Шумораи ададҳои ҷуфтро пай дар пай ба ду ҳиссаи баробар тақсим кардан мумкин аст, то ба як расидан; масалан, 64, нисфи он ба 32, нисфи 32 ба 16, нисфи 16 ба 8, нисфи 8 ба 4, нисфи 4 ба 2, нисфи 2 ба 1. Ҷуфт-тоқ як маротиба ба ду тақсим мешавад, қисмҳои баробар, ки ададҳои бутун мебошанд, аммо ин қисмҳо ададҳои тоқ мебошанд, масалан, 10. Шумораи ҷуфт-ҷуфт-тоқ ададест, ки нисфи он ҷуфт аст; аммо онро ба ду қисми баробар, ки метавонад якчанд маротиба ададҳои бутун бошанд, тақсим карда метавонем, то ки бо ин ба як расидан мумкин нест, чунон ки, ададе ба 12 тақсим шавад, пас он ба нисфи ин адад аввал ба 6, баътар бошад 3-ро низ ҳосил мекунад [67, с. 115].

Дар баробари ин Бузҷонӣ мисли Евклид танҳо ду навъи ададҳои ҷуфтро дида мебарояд: ҷуфтутоқ ва ҷуфт-ҷуфтутоқ.


Абу алӣ Ибни Сино (980-1037)

Абуалӣ ибни Сино [32] ба хосиятҳои навъҳои гуногуни шумораҳои ҷуфт диққати калон медиҳад; ӯ, масалан, ҷумлаҳоеро тартиб медиҳад: «Ҳар як тақсимкунандаи шумораи ҷуфт-ҷуфт низ як адади ҷуфт-ҷуфт аст», «Ҷамъи ададҳои пай дар пайи ҷуфт-ҷуфт аз як адад аз шумораи навбатии ҷуфт-ҷуфт ба як кам аст» (яъне $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$), «Байни ду ададҳои пай дар пайи ҷуфт-тоқи ҳамсоя ҳамеша фарқияти онҳо чор вуҷуд дорад» [5, с. 265-268] ва ғайра.

«Ал-Берунӣ барои асоснок кардани қоидаҳое, ки барои ҳалли масъалаи шоҳмот дар асари «Осор-ул-боқия» оварда шудааст, хосиятҳои ададҳои ҷуфт-ҷуфтро ба кор бурдааст» [9, с. 79].

Дар таснифи ададҳои тоқ, Бузҷонӣ, Берунӣ, Абуалӣ ибни Сино ва дигарон аз паси Евклид ва Никомах ададҳои тоқ, ададҳои сода, ададҳои нисбатан сода ва таркибиро баррасӣ мекунанд. Ба гуфтаи Бузҷонӣ, «адади сода ададест, ки танҳо ба як ва ба худаш тақсим мешавад. Адади таркибӣ бошад, зиёда аз ду тақсимкунанда дорад. Адади тоқу тоқ ададест, ки танҳо бо адади тоқ чен карда мешавад» [67, с. 115].

Абуалӣ ибни Сино ададҳои содаро ҳамчун ададҳое таъриф мекунад, ки ба ғайр аз як адад бо ягон адади дигар баробар нестанд, ба монанди се, панҷ, ҳафт, ёздаҳ ва ғайра. Ин ададҳо элементҳо буда, ҳамаи ададҳои дигарро ба вуҷуд меоранд: «ҳангоми тақсим кардани ҳамаи ададҳо ҳамеша ба ададҳои аввал меоянд. Ҳамаи шумораҳои дигар ададҳо аз онҳо иборатанд, дар ҳоле ки худи онҳоро ба ҳеҷ адади дигар ихтисор кардан мумкин нест» [5, с. 269].

Бояд таъкид кард, ки муаллифи «Калидҳои илм» ал-Хоразмӣ ба адади сода (ё якум) чунин таъриф додааст: «Адади тоқ адади аввалро дар бар мегирад». Он таркибӣ нест ва адади дигаре ба ҷуз як онро ҳисоб намекунад, масалан, 3, 5, 7. Маънои ибораи «ҳеҷ адад онро ҳисоб намекунад» дар он аст, ки ба ҳеҷ адад тақсим намешавад, яъне каср надорад, қисми ғайр аз он, ки номи худро дорад; «масалан, 1/3 барои 3 ва 1/5 барои 5». Ин нишон медиҳад, ки барои ал-Хоразмӣ мафҳуми каср дигар ба таълимоти адади абстрактӣ мухолиф набуд.

Барои ҳосилкунии ададҳои содаи пайдарпай аз «ҷадвали ғалбер» (Абуалӣ ибни Сино) истифода мешавад, яъне ба истилоҳ «Ғалбери Эратосфен».

Абуалӣ ибни Сино дар китоби «Донишнома», ки энсиклопедияи мухтасари фалсафа, мантиқ ва риёзиёт аст ва ба забони тоҷикӣ навишта шудааст, дар асоси Никомах дар бораи чигунагии пайдо кардани ададҳои сода, дар «Ғалбери Эратосфен» зикр шудааст. Мавриди зикр аст, ки вожаи ғалбер (ғирбол) дар китоби Абуалӣ ибни Сино зикр шудааст, ки ба тарҷумаи тоҷикӣ мувофиқ аст. Абуалӣ ибни Сино чунин меҳисобад, ки усули «Ғалбери Эратосфен» барои дарёфти ададҳои сода хеле мутаносиб аст [1].

Барои ададҳои байни ҳам сода (ададҳои байни ҳам сода, яъне аз рӯи теоремае, ки аз замони Евклид қабул шудааст) Бузҷонӣ ва дигар муаллифон барои истилоҳи «ченнашаванда» ва ададҳои бо ҳам таркибёфтаро бошад «ченшаванда» истифода мебурд. Абулвафо мегӯяд: Ададҳои ченшаванда онҳое ҳастанд, ки барои онҳо дар як вақт адади умумӣ мавҷуд аст, ки онҳоро ҳамзамон чен мекунад. Ченнашаванда онҳое мебошанд, ки қисми умумӣ надоранд ва барои онҳо рақаме вуҷуд надорад, ки онҳоро дар як вақт чен кунад.

Масъалаи меъёри ададҳои ченшаванда ва ченнашаванда ва дарёфти ченаки умумӣ бо истифода аз алгоритми Евклид ҳал карда мешавад [35].

Дар асарҳои арифметикӣ ба ин одатан бахши махсус дода мешавад. Пас, дар «Боби арифметикаи каср» аз «Рисолату-ш-Шамсия фӣ-л-ҳисоб»-и Найсабурӣ ду адад мавриди баррасӣ қарор гирифтааст, ки яке аз дигараш калонтар аст ва ду ҳолат ҷудо карда шудааст: 1) яке аз ададҳо ба дигараш каратӣ аст, масалан, 20 ва 4; 2) яке ба дигараш каратӣ нест. Дар мавриди дуюм ададе, ки аз як фарқкунанда мавҷуд аст, ё ин ки мавҷуд нест. Агар вуҷуд дошта бошад, он гоҳ шумораҳо ченшаванда хоҳанд буд ва агар не, пас онҳо ченнашаванда мебошанд. Намунаи ченшавандаи бист ва шаш адад аст. Вақте ки аз адади калон адади хурд се маротиба тарҳ карда шавад, ду боқӣ мемонад, ки аз шаш камтар аст. Дар баробари ин, шаш ченаки бист не, балки ду ченак аст. Ҳар яке онҳо дученака аст. Намунаи ченнашавандаи ёздаҳ ва панҷоҳ камтар аст, вақте ки аз калонтар, яъне аз 50 шумораи муайяни ададҳо, яъне 11 панҷ маротиба тарҳ карда шавад, шаш боқӣ мемонад. Агар аз ёздаҳ шашро кам кунем, панҷ боқӣ мемонад. Ғайр аз ин, агар аз шаш панҷро кам кунем, як боқӣ мемонад. Аз ин рӯ, мо медонем, ки онҳо ченшаванда нестанд [67, с. 116].

*Ададҳои мукаммал.* Евклид дар асари худ бо номи «Ибтидо» дар бораи ададҳои мукаммал кор кардааст. Ӯ ададҳоеро мукаммал номидааст, ки ҷамъи тақсимкунандагони хоси онҳо ба худи адади додашуда баробар бошад (яъне, ғайр аз адади додашуда). Агар тақсимкунандаҳои хоси адади

$n$ –ро ба $\sigma(n)$ ишора кунем, он гоҳ адади мукаммал шакли $\sigma(n) = n$ мегирад. Масалан $6 = 1 + 2 + 3$,

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \text{ ва ҳоказо.}$$

Олими юнонӣ Афлотун низ дар бораи ададҳои мукаммал навиштааст. Дар яке аз гуфтаҳои хирадмандонаи Афлотун чунин ҷумла мавҷуд аст: «Рақами 6 рақами хеле аҷоиб аст». Дар зиёфатҳои расмии римиҳо ба одат даромада буд, ки ҷои шашумро ба инсони оқил пешкаш мекарданд. Соли 1917 дар Рим саройи зеризаминӣ кашф карда шуд, ки аз 28 ҳуҷра иборат буд. Баъдтар маълум шуд, ки ин сарой Академияи ба номи Пифагор буда, аъзои он аз 28 нафар иборат будааст. Дар Юнони қадим (ду ҳазор сол пеш) фақат 4-то ададҳои мукаммал маълум буда, онҳо: 6, 28, 496, 8128 мебошанд.

Евклид бо роҳи зерин ҳосилкунии ададҳои мукаммалро пешниҳод карда буд: аз пайдарпайии прогрессияи геометрии $1,\ 2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots$ ҳангоми суммаи аъзоҳои он ҳисоб шудан, адади сода ҳосил шавад, ин ададро ба аъзои охирони ин адад зарб карда, адади мукаммалро ҳосил мекунанд. Масалан:

$$1 + 2 = 3 - \text{адади сода;}$$

$$(1 + 2) \cdot 2 = 6 - \text{адади мукаммал;}$$

$$1 + 2 + 2^2 = 7 - \text{адади сода;}$$

$$(1 + 2 + 2^2) \cdot 2^2 = 28 - \text{адади мукаммал.}$$

Бо ин роҳ ҳама вақт ҳосилкунии ададҳои мукаммалро бо теоремаи зерини Евклид баён кардан мумкин аст:

Агар $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ ($k > 1 -$ адади натуралӣ) буда, $2^k - 1$ адади сода бошад, $n$ адади мукаммал мешавад.

Дар фасли ададҳои мукаммал риёзидонҳои Шарқ чун қоида аз доираи муайянкардаи элементҳои Евклид берун мебароянд: ғайр аз ададҳои мукаммал $(n) = n$, ададҳоеро, ки Никомах пешниҳод кардааст, ба назар гирифта $\sigma(n) > n$ зиёдатӣ ва нокифоя $\sigma(n) < n$ муқаррар кардаанд. Тибқи таърифи Абулвафо: «Адади мукаммал (ат-томм) ададест, ки аъзоҳояш ҳангоми ҷамъ кардан ба худ баробар аст (яъне, ғайр аз адади додашуда). Ададҳои зиёдатӣ (ал-зоид) ададест, ки аъзоҳояш ҳангоми ҷамъ кардан аз худи адад бештар хоҳад буд ва адади нокифоя (ан-ноқис) ададест, ки аъзоҳояш ҳангоми ҷамъ кардан аз худи адад камтар аст.

Ададҳои дӯст дар байни математикҳои Шарқ мароқи калон ба амал оварданд. Қоидаи ҳосилкунии онҳоро бори аввал Собит ибни Қурра таъриф дода, бо ҳамин дар инкишофи арифметикаи назариявии асримиёнагӣ қадами намоёне ба пеш гузошт. Номи пурраи ин риёзидони араб Абулҳасан Собит ибни Қурра ал Ҳарронӣ буда, солҳои 826 – 901 мелодӣ зиндагӣ кардааст. Дар давоми ҳаёти худ Собит ибни Қурра бисёр асарҳо, аз ҷумла «Усул»-и Евклидро тарҷума ва таҳрир кардааст. Собит ибни Қурра қоидаи ҳосилкунии ададҳои дӯстро тартиб дода буд. Дастхати ӯ «Мақола фӣ истихроҷ ал-аъдоди-л-мутаҳабба би суҳула ал-маслак ило золика» дар қатори асарҳои дигари риёзидон дар ҷилди дастхатие, ки аз ҷониби ас-Сиҷизӣ тарҷума шудааст, дар Китобхонаи миллии Париж (№ 2457, 170в - 180в) маҳфуз аст. Дар соли 1852 Ф. Вёпке тарҷумаи як қисмати ин асарро ба табъ расонд: ӯ муқаддима ва баёноти теоремаро тарҷума кард, вале далелҳои пешниҳодҳои ёридиҳанда ва қоидаро ба назар нагирифтааст.

Собит ибни Қурра дар муқаддима аз татбиқи васеи таълимоти ададҳо дар назарияҳои фалсафии пифагориён сухан ронда, ду навъ адад — мукаммал ва дӯстро муайян мекунад, ки «онҳо махсусан барои ёфтан лозим буданд».

Ададҳои дӯст ду ададе мебошанд, ки дар онҳо ҷамъи тақсимкунандагони як адад ба адади дигар баробар аст. Масалан, Собит ибни Қурра як ҷуфт адади дӯстро мисол меорад, ки дар замони худ маълум буд: 220 ва 284:

Масалан, ҷамъи тақсимкунандаҳои 220 = 1 + 20 + 10 + 5 + 4 + 2 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284 ва 284=1+2+4+71+142=220 аст. Бо $\sigma(n)$ ҳамаи тақсимкунандаҳои сумаи адади $n$ −ро ишора мекунем. Ҳангоми ададҳои

$m$ ва $n$ ададҳои дӯст будан баробарии $\sigma(m) = n;\ \sigma(n) = m$ иҷро мешавад. $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$, ки дар ин ҷо ҷамъшавандаи тарафи чапи тақсимкунандаи хоси адади 220 баробар аст [137, с. 52-53].

Агар $m$ ва $n$ ададҳои дӯст бошанд, дар ин ҳолат иҷрошавии баробарии $m = 2^a p; n = 2^a \cdot q \cdot l$ исбот мешавад. Дар ин ҷо $a -$ адади натуралӣ, $p, q,\ l$ бошанд ададҳои сода буда, баробар тақсимшавии баробарии $p = (2^k + 1)^2 \cdot 2^{2a-k} - 1;\ q = 2^a - 1 + 2^{a-k};\ l = 2^a - 1 + 2^{a+k}$ исбот шудааст [67, с. 118].

Собит ибни Қурра пеш аз муайян кардани қоидаи ҳосилкунии ду адади дӯст, як қатор исботҳои ба худ ҳос, яъне қоидаи тақсимшавии (масъалаҳои $1 - 3$) ва теоремаи асосии назарияи тақсимшавиро дар бораи ягонагии тақсимшавии ададҳои сода исбот мекунад. Евклид [35, IX, с. 14] ин теоремаро танҳо барои ҳолате исбот кард, ки ҳамзарбшавандаҳои сода дар дараҷаи якум бошанд, Собит ибни Қурра ҳолати умумиро баррасӣ намуд.

Масъалаи 4 исбот мекунад, ки агар пайдарпайии

$$a, 2a, 4a, \cdots, 2^n a,$$

дода шавад, пас

$$2^n a - (a + 2a + 4a + \cdots + 2^{n-1} a) = a.$$

Дар асоси ин натиҷа Собит ибни Қурра теоремаро (масъалаи 5) дар бораи усули сохтани ададҳои мукаммал, ададҳои зиёдатӣ ва норасоӣ исбот мекунад. Бигзор пайдарпаии $1, 2, 2^2, \cdots, 2^n$ дода шуда бошад, ки суммаи аъзоҳои онҳо $m = 2^{n-1} - 1$ аст. Агар дар ин ҷо р адади сода бошад, пас $2^n$ ҳангоми $p -$ адади мукаммал мешавад, агар $p = m$ бошад, адади зиёдатӣ аст, агар р $< m$ ва ё $p\ >\ m$ бошад, адади норасоӣ аст.

Евклид танҳо ададҳои мукаммалро дида баромада, пешниҳоди 6 далели зеринро исбот мекунад: агар пайдарпайии $1, 2, 2^2, \cdots, 2^n$, дода шавад, он гоҳ адади $2^n\ p_1 p_2$, ки дар он $p_1$ ва $p_2$ –ададҳои сода мебошанд, зиёдатӣ ё норасоӣ аст.

Собит ибни Қурра дар масъалаҳои 7 ва 8 собит мекунад, ки агар ададҳои $A = a, B = 2a, C = 4a, D = 8a$ дода шаванд, пас баробариҳои зерин дурустанд.

$$C(C + D)(D + C) = C(A + D)D,$$
$$C(D + D + 2C) = D(F + D).$$

Ӯ аз онҳо истифода бурда, исбот мекунад (пешниҳоди 9).

$$D(A + D - 1) = C[D(A + D) - 1 - (C + D - 1)(B + C - 1)].$$

Ниҳоят, дар масъалаи 10 қоидаеро барои дарёфти ҷуфти ададҳои дӯст таҳия ва исбот мекунад. Он аз пайдарпайии зерин иборат аст, ки онро дида мебароем:

$$A = 1, B = 2, \cdots, C = 2^{n-2}, D = 2^{n-1}, E = 2^{n}, F = 2^{n+1}.$$

Бигзор $A + B + \cdots + C = D + E = G,\ G + E = H,\ C - D = \theta$ бошад.

Мо ададҳои A, B, ⋯, C, D, E-ро интихоб мекунем, то ки H ва θ ададҳои сода бошанд.

Бигзор $H\theta = K,\ KE = L,\ F + C = M,\ MF + N,\ N - 1 = X.$

Маълум аст, ки

$$G = 2^{n+1} - 1,$$
$$H = 2^{n+1} - 1 + 2^{n},$$
$$\theta = 2^{n+1} - 1 + 2^{n-1},$$
$$L = 2^{n}(2^{n+1} - 1 + 2^{n})(2^{n+1} - 1 + 2^{n-1}).$$

Мо ададҳои A, B, ⋯, C, D, E-ро интихоб мекунем, то X низ адади сода бошад. Бигзор $XE = O$, яъне

$$O = [2^{n+1}(2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1]2^{n}.$$

Исбот мешавад, ки L ва O ададҳои дӯст мебошанд.

Ин формуларо Собит ибни Қурро коркард кардааст [67, с. 116-120].

Дар китоби Файзиев Р.Ф. соли 1967 ба забони тоҷикӣ ба номи «Ғалбери Эратосфен, умумикунӣ ва татбиқи он (ададҳои сода)» нашр шуда буд, чунин омадааст: «қайд кардан завқовар аст, ки ба омӯхтани хосиятҳои ададҳои дӯст математики тоҷики асри XIII Муҳаммад бин ал-

Вусудӣ машғул гаштааст. Вай қоидаи тартиб додани ададҳои дӯстро чунин кор карда баромадааст» [112, с. 12].

Агар адади намуди $2^{k+1} - 1 = p^k (k \geq 1)$ сода бошад ва ҳар яке аз ададҳои намуди

$$p = (2^{k+1} - 1) - \frac{1}{4} 2^{k+1} = 3 \cdot 2^{k-1} - 1,$$

$$q = (2^{k+1} - 1) - \frac{1}{2} 2^{k+1} = 3 \cdot 2^{k} - 1,$$

$$r = 2^{k+1} \left( 2^{k+1} + \frac{1}{8} 2^{k+1} \right) - 1 = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$$

сода бошанд, он гоҳ якумини ададҳои дӯст намуди

$$m = \frac{1}{2} 2^{k+1} pq = 2^k pq$$

гирифта, дуюминаш бошад

$$n = 2^k r$$

мешавад.

Ибн ал-Ҳайсам (965-1039)

*Ибн ал-Ҳайсам (965-1039)*, ки дар Аврупо бо номи Алҳазан маъруф аст, ба далели таҳия ва истифодаи усули илмӣ аввалин олим номида шудааст. Вай бо кашфиёти зиёде дар оптика ва математика машҳур аст. Ҳангоми кор бо масъалаи назарияи ададҳои сода Ҳайсам муайян кард, ки: «агар р ягон адади сода бошад, «пас ҷамъи ададҳои $2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (p-1) + 1$ ба р тақсим мешавад ва агар онро ба яке аз ададҳои $2, 3, 4, \cdots, (p-1)$ тақсим кунем, боқимонда ҳамеша воҳид хоҳад буд» [5]. Дар замони мо ин ҳамчун «Теоремаи Вилсон» маъруф шуд ва бештар дар шакли модули арифметикии қайдшуда $(p-1)! \equiv -1(modp)$, пайдо мешавад, ки онро Гаусс соли 1796 ҳангоми 19-солагиаш таҳия кардааст. Инчунин дар кори ал-Ҳайсам кӯшиши исботи баръакси теоремаи ададҳои мукаммали Евклид мавҷуд аст. Гарчанде, ки ин кӯшиш бомувафақият набуд, онро баъдан Эйлер исбот кард [41].

«Соли 1222 риёзидон ва ситорашинос Аҳмад ибн ал-Банно ададҳои бутунро аз 2 навишта, қайд мекунад, ки ададҳои аввали хатзадашуда дар «Ғалбери Эратосфен» адади 4 ва ҳама ададҳои ҷуфт, баъд 9, 15 ва ҳамаи ададҳои тоқи минбаъда ба 3 каратӣ мебошанд, баъд 25, 35 ва тамоми каратиҳои 5. Барои муайян кардани ададҳои содаи то n, шарҳ дода мешавад, ки дар ин ҳолат ададҳое, ки зарбҳои аввалиндараҷаи аз $\sqrt{n}$ зиёд нестанд, бояд хориҷ карда шаванд» [137, с. 7].

*Ал-Форисӣ (тақрибан 1260-1320 милодӣ).* Номи пурраи ин риёзидон Камолиддин Абулҳасан Муҳаммад Ал-Форисӣ аст [68]. Ал-Форисӣ бо нақши худ дар илми оптика ва назарияи ададҳо машҳур аст. Дар соҳаи дувум, Ал-Форисӣ бештар бо такмили муодилаҳои ададҳои дӯст, ки Собит ибни Қурра дида баромадааст, машҳур аст. Барои ададҳои дӯст формулаи навро дар ҳолати $n$>1 будан, $p_n = 3 \times 2^n - 1$ ва $q_n = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ пешниҳод кардааст. Агар ададҳои $p_{n-1}, p_n$, ва $q_n$ сода бошанд, пас ададҳои $a = 2^n p_{n-1} p_n$ ва $b = 2^n q_n$ ададҳои дӯст мебошанд.

Ин равиши нав факторизатсиякунии дараҷаи ададҳои содаро дар бар мегирад, ки имрӯз ҳамчун теоремаи асосии арифметика маълум аст.

*Таҳқиқи фаъолияти илмии олимони асримиёнагии Осиёи Миёна дар корҳои олимони тоҷик дар замони шӯравӣ.* Ҳар як халқу миллат дорои таъриху мероси илму фарҳанги бой буда, омӯзиши ҳаматарафаи онҳо ба дӯши олимони таърихдон гузошта мешавад. Аз асрҳои IX сар карда, то асрҳои XVII дар Осиёи Марказӣ як зумра олимону донишмандон ба саҳнаи илму маърифат омадаанд, ки таҳқиқоту дастовардҳои илмии онҳо дар таърихи инсоният ҷои намоёнро ишғол менамояд. Аз таърих хуб маълум аст, ки асрҳои миёна бо корҳои илмии олимони Осиёи Марказии ин давр, монанди Муҳаммад ал-Хоразмӣ, Абунасри Форобӣ, Абурайҳони Берунӣ, Абуалӣ ибни Сино, Насируддини Тӯсӣ, Умари Хайём ва даҳҳо дигарон, ҳамчун «асри тиллоӣ», «Ренессанси Шарқ» маълуму машҳур гашт. Маҳз бо шарофати кашфиёту рисолаҳои илмии олимони ин давра на танҳо дар аксари мамлакатҳои Шарқи миёнаву наздик, дар давлатҳои Аврупо низ ба пешравии илм асос гузошта шуд. Олимони ин давра, ҳарчанд дар аксар қисмҳои илмҳои гуногун ба дастовардҳои зиёд ноил шуда бошанд ҳам, хусусан дар соҳаи математика ва татбиқи он дар астрономия ба муваффақиятҳои арзанда соҳиб гардиданд. Оид ба ҳаёту фаъолияти олимони ин давр таҳқиқоти зиёде мавҷуд буда, дар ин самт корҳои олимони маъруф А.П. Юшкевич, Б.А. Розенфелд, Г.П. Матвиевская, С.Х. Сироҷиддинов ва дигарон хеле назаррас мебошанд.

То ибтидои солҳои 60-уми асри XX оид ба омӯзиши таърихи илми математика ва астрономия таҳқиқот роҷеъ ба рисолаҳои илмии олимони асри IX - асри XV асарҳои зиёд таълиф шуда, дастовардҳои илмии олимони ин давра таҳлил ва тафсири худро ёфта буд. Вале, таҳқиқоти олимони мактаби илмии Самарқанд, ки аз ибтидои асри XV, аз ба сари қудрат омадани Мирзо Улуғбек (1409-1449) ибтидо мегирад, барои таърихдонон ва иломомӯзон «хонаи торик» ва ба ин кори хеле пурмашаққату заҳматталаб яке аз аввалинҳо шуда Гадойбой Собиров (1928-1976) даст задаанд. Дар ин ҷода ин олими ҷӯянда якчанд рисолаву асарҳои олимони ин даврро дарёфт карда, ба онҳо шарҳу тафсирҳо иншо ва роҷеъ ба дастоварди математикии онҳо мақолаву китобҳо таълиф намудааст.


Гадойбой Собиров (1928-1976)

Китоби нахустин ва арзишманди Г. Собиров, бо иловаю тағйирот ба маводи рисолаи диссертатсионии ӯ бо номи «Инкишофи математика дар Осиёи Миёна» (асрҳои XV- XVII) дар нашриёти «Ирфон», дар ҳаҷми 132 саҳифа, соли 1966 бо теъдоди 2000 нусха аз чоп баромад. Арзиши ин китоб дар он буд, ки он, пеш аз ҳама, аввалин китоб ба забони тоҷикӣ оид ба таърихи математикаи Осиёи Миёнаи асрҳои миёна ва баъдан дар он таҳқиқоти олимро бахшида ба инкишофи илми риёзӣ дар асрҳои XV-XVII, ки дар ин давра мактаби илмии Улуғбек дар шаҳри Самарқанд таъсис ёфта, шуҳрате пайдо карда буду то ин давр бо таври васеъ наомӯхта шуда буд, дар бар мегирад. Чи тавре муаллиф дар ибтидои китобаш менависад: «... то алҳол аз сабаби пурра набудан ва пароканда будани маъхазҳои зарурӣ хизматҳои олимони Осиёи Миёнаи асрҳои XV-XVII ба қадри имкон омӯхта нашудаанд» [105, с. 3].

Хизмати бузурги Г. Собиров дар ин ҷода аз он иборат аст, ки ӯ якчанд дастхатҳои олимони ин даврро дар китобхонаҳои мамолики гуногун муайян ва дарёфт намуда, дар асоси факсмиле (нусха)-ҳои он таҳқиқот бурдааст. Масалан, барои китоби номбурдааш олим аз чунин дастхатҳо: Алӣ Қушчӣ-«Китоб ал-Муҳаммадия» аз китобхонаи Лейдени Нидерландия, «Рисолаи ҳисоб» аз китобхонаи давлатии Тоҷикистон ба номи А. Фирдавсӣ, «Рисолаи қусур» аз китобхонаи Институти шарқшиносии ш. Санкт-Петербурги Россия, «Шарҳи зиҷи ҷадиди курагонӣ» аз китобхонаи Институти шарқшиносии Ӯзбекистон; Баҳоуддин Омулӣ – «Хулосат-ул-ҳисоб» аз китобхонаи Академияи илмҳои Тоҷикистон, Муллоалии Бирҷандӣ – «Шарҳи бист боби Тӯсӣ» аз китобхонаи ба номи Салтиков-Шедрини ш. Санкт-Петербурги Россия, Наҷмиддини Алихон – «Рисолаи ҷабр ва муқобала» аз китобхонаи Лейдени Нидерландия, Алӣ Ҷумбурӣ – «Шарҳи хулосат ул-ҳисоб»-и Баҳоваддин аз китобхонаи ш. Калкуттаи Ҳиндустон ва ғайра истифода бурдааст.

*Дастовардҳои илмии олимони асримиёнагии Осиёи Марказӣ дар соҳаи математика ва астрономия.* Ҳамчун ҷамъбасти таҳқиқоти илмии Г. Собиров китоб ба номи «Илмҳои риёзӣ ва астрономӣ дар Осиёи Наздик ва Миёна дар асрҳои XVI-XVII» (Осиёи Миёна, Эрон, Туркия ва Ҳиндустони шимолӣ), ки алҳол бо кӯшиши зиёди ҳамкорону шогирдони ӯ ба чоп омода карда шудааст. Ин китоб аз шаш боб иборат буда, дар қисми якуми боби аввал роҷеъ ба фаъолияти олимони Шарқи наздику миёнаи асрҳои XVI-XVII сухан меравад. Дар зербоби дуюм оид ба ададҳои натуралӣ, ададҳои ҷуфту тоқ ва дигар хосияти ададҳо, ки аз тарафи олимони ин давр баён шудаст, маълумот пешниҳод мегардад. Масалан, Алӣ Қушчӣ муқоисаи ададҳоро чунин баён мекунад: агар $a$ ва $b$ ададҳои натуралӣ бошанд, дар байни онҳо се ҳолат мавҷуд аст, яъне: $a = b$ ё $a < b$ ё $a > b$. Агар $a = b$ бошад, онҳоро Алӣ Қушчӣ якхела (мутамасил, луғавӣ - ба як дигар баробар) меномад. Дар ҳолати $a > b$ ва $b \neq 0$ (ё $b > a$ ва $a \neq 0$) будан чунин ададҳои $q$ ва $r$ ($q_1$ ва $r_1$), ёфт мешаванд:

$$a = bq + r \text{ ё ки } b = aq_1 + r_1.$$

Ғайр аз ин, дар замони шуравӣ олимони барҷастаи рус ба монанди муаррихони маъруф Г.П. Матвиевская (1930-2025), Б.А. Розенфелд, А.П. Юшкевич ва ғайра дастовардҳои корҳои илмии олимони форсу тоҷики асрҳои миёна доир ба математикаро таҳқиқ карда, корҳои зиёдеро ба анҷом расониданд. Масалан, олими барҷастаи шуравӣ ва рус, таърихшиноси математика Г.П. Матвиевская соли 1967 китобе ба номи *«Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке»* [67] ба чоп расонидааст, ки аз 334 саҳифа иборат буда, 8 бобро дар бар гирифтааст. Аз он 5 бобаш пурра ба дастовардҳои корҳои илмии олимони форсу тоҷики асрҳои миёна доир ба математика ва астрономия бахшида шудааст.

## ХУЛОСАИ БОБИ I

Мафҳуми адад яке аз мафҳумҳои асосии илми математика ба шумор рафта, ҷиҳати ифодаи миқдори ин ё он чизҳо истифода мешавад. Ишоракунии адад гуногун буда, он дар ҷойҳои гуногун ба тарзи мухталиф тасвир мегардад.

Вобаста ба хосиятҳои ададҳо, омӯзиш ва истифодаи онҳо дар илми математика як қисми муҳимми он назарияи ададҳо ба вуҷуд омад, ки таҳқиқот дар ин самт имрӯзҳо низ идома дорад. Монанди дигар назарияҳо назарияи ададҳо низ ба қисматҳо тақсим мешавад, ки омӯзиш ва таҳқиқи ададҳои сода қисми муҳимми он ба шумор меравад.

Адади натуралӣ сода номида мешавад, агар он танҳо ба як ва ба худаш тақсим шавад, яъне ададҳои 2, 3, 5, 7, 11, 13 ва ҳоказо, мисоли ададҳои сода мебошанд.

Ба таҳқиқи муайянкунӣ ва омӯзиши назарияи ададҳои сода олимон аз давраҳои қадим шуруъ намуда буд. Яке усули муайянкунӣ бо номи олими юнони қадим Эратосфен вобаста буда, дар таърихи математика ба номи «Ғалбери Эратосфен» маълум ва машҳур аст.

Ниёгони мо, олимони асримиёнагии форсу тоҷик, монанди Муҳаммад ал-Хоразмӣ, Абунасри Форобӣ, Абу алӣ Ибни Сино, Абурайҳони Берунӣ, Собит ибни Қурра, Ибни Ҳайсам, Ал-Форисӣ ва даҳҳо дигарон дар аксари самтҳои илмҳои дақиқ, аз ҷумла математика таҳқиқоти илмӣ гузаронидаанд. Дар соҳаи назарияи ададҳо низ онҳо рисолаҳои арзишманд таълиф намудаанд.

Ҳамин тавр, Ибни Сино дар китоби «Донишнома», ки энсиклопедияи мухтасари фалсафа, мантиқ ва риёзиёт буда, ба забони тоҷикӣ навишта шудааст, дар асоси теоремаи Никомах дар бораи чигунагии пайдо кардани ададҳои сода, дар «Ғалбери Эратосфен» зикр шудааст. Мавриди зикр аст, ки вожаи ғалбер (ғирбол) дар китоби Сино зикр шудааст, ки ба тарҷумаи тоҷикӣ мувофиқ аст. Ибни Сино чунин меҳисобад, ки усули Ғалбери Эратосфен барои дарёфти ададҳои сода хеле мутаносиб аст.

Ғайр аз ин, қайд кардан ба маврид аст, ки ба омӯхтани хосиятҳои «ададҳои дӯст» математики тоҷики асри XIII Маҳмуд бин ал-Вусудӣ машғул гаштааст. Ӯ қоидаи тартиб додани «ададҳои дӯст»-ро кор карда баромадааст. Илова ба ин, қоидаи ҳосилкунии «ададҳои дӯст»-ро бори аввал Собит ибни Қурра таъриф дода, бо ҳамин, дар инкишофи арифметикаи назариявии асримиёнагӣ қадами намоёне ба пеш гузошт. Олими дигари барҷастаи асримиёнагӣ, физик ва математик, Ибни Ҳайсам буда, ӯ ҳангоми кор бо масъалаи назарияи ададҳо муайян кард, ки «агар $p$ ягон адади сода бошад, «пас ҷамъи ададҳои $2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (p-1) + 1$ ба $p$ тақсим мешавад ва агар онро ба яке аз ададҳои $2, 3, 4, \cdots, (p-1)$ тақсим кунем, боқимонда ҳамеша воҳид хоҳад буд». Дар солҳои баъдӣ ин ҳамчун «Теоремаи Вилсон» маъруф шуд. Олими дигари асримиёнагии форсу тоҷик, Ал-Форисӣ буда, он дар илми оптика ва назарияи ададҳо машҳур аст. Ал-Форисӣ бештар бо такмили муодилаҳои «ададҳои дӯст», ки Собит ибни Қурра дида баромадааст.

# БОБИ II. ТАҲВИЛИ НАЗАРИЯИ АДАДҲОИ СОДА БА АВРУПО

## 2.1. Такмили назарияи ададҳои сода дар осори олимони Аврупо

Пас аз юнониҳо, танҳо дар асрҳои XVI-XVII олимони аврупоӣ ба ададҳои сода таваҷҷуҳи ҷиддӣ доданд.


Марен Мерсенн (1588-1648)

*Ададҳои содаи Мерсенн.* Чи тавре дар боло зикр гардид олимони зиёде оид ба назарияи ададҳо таҳқиқот бурда, ба дастовардҳои арзанда ноил гаштаанд. Аз ҷумла, олими фаронсавӣ Марен Мерсенн (1588-1648) дар назарияи ададҳо ададҳои намуди $M_n = 2^n - 1$ ($n -$ адади натуралӣ) $-$ ро таҳлил кардааст. Ҳангоми $n = 1, 2, 3, \cdots$ будан, ададҳои мерсенн мувофиқан $M_1 = 1$, $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_4 = 15, \cdots$ ададҳо ҳосил мешаванд. Баъзе аз ин ададҳо сода буда, баъзеашон ададҳои таркибӣ мебошанд. Агар $M_n$ адади сода бошад, ин гуна ададҳо ададҳои мерсенн номида мешавад. Дар ин ҷо

$$n = 2 \text{ будан } M_2 = 3,$$
$$n = 3 \text{ будан } M_3 = 7,$$
$$n = 5 \text{ будан } M_5 = 31,$$
$$n = 7 \text{ будан } M_7 = 127 -$$

ҳо ҳосил мешаванд. Бо $M_{\mathcal{R}}$, ки дар ин ҷо $\mathcal{R}-$ададҳои содаи мерсеннро ишора мекунем. Бо ҳамин тариқ, ададҳои бо тартиби як, ду, се, чор ва ҳоказои 3, 7, 31, 127, $\cdots$ ададҳои содаи мерсенн номида мешаванд.

Агар $n = n_1 \cdot n_2$ адади таркибӣ бошад, адади таркибӣ будани $\mathrm{M}_{n_1 \cdot n_2}$ $-$ро исбот кардан осон аст:

$$M_n = \mathrm{M}_{n_1 \cdot n_2} = (2^{-n_1})^{n_2} - 1 = (2^{n_1} - 1)[(2^{n_1})^{n_1 - 1} + \cdots + 1].$$

Пас, адади $M_n$ ба $(2^{n_1} - 1)$ тақсим мешавад, аз ҳамин сабаб адади $M_n$ адади таркибӣ мебошад.

Бо ҳамин тарз, агар $M_n$ адади сода бошад, $n$ адади сода мебошад. Вале, на ҳама вақт барои дилхоҳ адади содаи $n$, адади $M_n$ сода шуда метавонад.

Агар $p$ адади сода бошад, тақсимкунандаи $M_p$ дар намуди $(2p\mathcal{R}+1)$ буданаш исбот шудааст ($\mathcal{R} \geq 0$ адади бутун). Аз боло, $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$ адади таркибиаш аниқ шудааст. Тақсимкунандаҳои $M_{11}$ ба $22\mathcal{R}+1 = 2 \cdot 11 \cdot \mathcal{R} + 1$; аз ҷумла $2 \cdot 11 + 1 = 23(\mathcal{R} = 1, p = 11)$; $2 \cdot 4 \cdot 11 + 1 = 8 \cdot 11 + 1 = 89$ $(\mathcal{R} = 4, p = 11)$.

Тақсимкунандаи адади $M_{101} = 2^{101} - 1$ дар шакли $2 \cdot \mathcal{R} \cdot 101 + 1$ буданаш маълум бошад ҳам, вале тақсимкунандаи он аниқ нашудааст. Бо ҳамин сабаб, аксар вақт адади сода ва ё адади таркибӣ будани адади $M_{101}$ муайян набуд. Баъдтар таркибӣ будани ин адад бо усулҳои дигар исбот карда шуд.

Адади аз 31 хона иборат будаи $2^{101} - 1$ аз зарби дутоададҳои ҳархелаи сода иборат буда, аз ҳама тақсимкунандаи содаи хурди ин адад аз 11 хона иборат буданаш исбот шудааст.

Агар адад дар намуди $p = 8\mathcal{R} + 7$ адади сода бошад, зарурати тақсимшавии $\frac{M_{p-1}}{2}$ ба адади $p$ низ исбот шудааст.

Аз ин намуди $p = 8\mathcal{R} + 7$ адади сода бошад, ададҳои зиёди таркибие дар намуди $M_p$ муайян гаштааст.

Адади $M_{23} = 2^{23} - 1$ ба адади 47 тақсим мешавад, чунки $p = 23 = 8 \cdot 2 + 7$ ва адади $M_{\frac{p-1}{2}} = M_{11} = 2047$ ба 23 тақсим мешавад.

Адади $M_{33} = 2^{33} - 1$ ба 67 тақсим мешавад.

Адади $M_{131} = 2^{131} - 1$ ба 263 тақсим мешавад.

Адади $M_{179} = 2^{179} - 1$ ба 359 тақсим мешавад.

Адади $M_{191} = 2^{191} - 1$ ба 383 тақсим мешавад.

Адади $M_{223} = 2^{223} - 1$ ба 447 тақсим мешавад.

Ин гуна ададҳои таркибӣ беохир бисёр ҳисоб шуда бошад ҳам, вале ин тасдиқот то ҳол исбот нашудааст.

То ҳол фақат 24 то ададҳои содаи мерсенн маълум аст ва онҳо барои $p$ – ҳои мувофиқи $M_p$ чунинанд [50]:

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279,$$

$$2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213 \text{ ва } 19937.$$

Байни ададҳои содаи $M_{127}$ ва $M_{521}$ мавҷуд будани 66-то ададҳои таркибии мерсенн муайян шудааст [137, с. 34-40].

Соли 1637 математики фаронсавӣ П. Ферма (1601-1665) теоремаи зеринро таҳия кард: «*муодилаи* $x^n + y^n = z^n$ *барои n>2 ҳалли натуралӣ надорад*, ки алҳол он бо номи теоремаи бузурги Ферма маълум аст. Исботи дурустии ин гипотеза бо ададҳои сода алоқамандии зич дорад. (Танҳо соли 1994 математики амрикоӣ Эндрю Уэйлс (1953) ба исботи теоремаи бузурги Ферма муваффақ шуд)» [118, с. 55].

*в)* Ба ғайр ин, П. Ферма гипотезаро барои дилхоҳ адади натуралии $n$, ки ифодаи $2^{2^n} + 1$ адади сода аст, пешниҳод намуд. Аз ҷумла:

$n = 0$ будан $F_1 = 2^{2^0} + 1 = 3 -$ адади сода,

$n = 1$ будан $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5 -$ адади сода,

$n = 2$ будан $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17 -$ адади сода,

$n = 3$ будан $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257 -$ адади сода,

$n = 4$ будан $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 655337 -$ адади сода.

Пиер Ферма
(1601-1665)

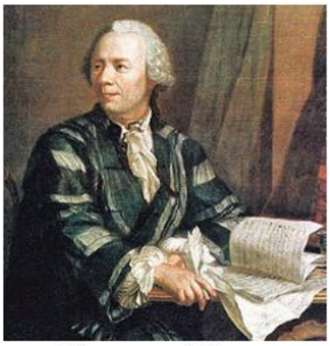
Ӯ ба ҷои $n$ ададҳои 0, 1, 2, 3, 4 $-$ ро ба ифодаи дар боло додашуда гузошта, ададҳои содаи 3, 5, 17, 257, 65537-ро ҳосил карда буд.

Олим барои ҳолати ҳангоми $n \geq 5$ будан, санҷиш нагузаронда, тасдиқ намуд, ки барои ҳамаи ҳолатҳо ин ифода адади сода мешавад.

Вале ҳангоми $n = 5$ будан, аз ифодаи $2^{2^5} + 1$ адади бениҳоят калон ҳосил мешавад. Адади сода ва ё адади таркибӣ будани онро муайян кардан, масъалаи хеле душвор аст.

Баъдтар асарҳое пайдо шуданд, ки сабаби аз иштибоҳ озод шудани «Ғалбери Эратосфен» гаштанд: «Масалан, нашриёти англис осори Нютон (солҳои 1642-1727), инчунин С. Орслей (солҳои 1722-1806) соли 1722 дар 62 ҷилд осори мунтахаби фалсафиро ба нашр расонд, ки дар онҳо ададҳои тоқ аз 3 то 157 мавриди барасӣ қарор гирифтааст. Дар ин корҳо ба зери ададҳои ба 3 каратӣ (ғайр аз 3), ба 5 каратӣ (ғайр аз 5) ва ғайра хат кашида мешуд. Ин ҷараён ҳамон вақте ба итмом мерасид, ки агар ба зери ададҳои ба 11 каратӣ хат кашида шавад (ба ғайр аз 11). Аммо Орслей, дар навбати худ барои ҳамаи ададҳои сода онро идома дода, инро бо он асоснок мекард, ки гӯё Эратосфен чунин рафтор мекардааст» [26, 137, с.6].

*г) Леонард Эйлер* (1707-1783), математик ва механики швейтсарӣ, дар рушди фанҳои дақиқ, ба монанди физика, астрономия, математика ва як қатор илмҳои дигар саҳми назаррас гузоштааст.



Леонард Эйлер
(1707-1783)

То ибтидои асри XVI дар математика ягона воситаи муайянкунии ададҳои содаии буд, ки бояд ададро ба ҳамаи тақсимкунандаҳои одӣ тақсим намуд. Бояд тақсимкунандаҳои одӣ аз решаи квадратии n зиёд набошад. Масалан: «Леонард Эйлер исбот намуд, ки 1000009 ба 243 тақсимшаванда буда, пештар тақсимшавандагии ин ададро ба 2, 3 ва 7 аз рӯи тақсимшавӣ ва ба ададҳои содаи 11, 13, 17, ..., 243 бевосита санҷида буд» [19, с. 81-88].

Соли 1732 Л. Эйлер нодуруст будани гипотезаи Ферма, аз ҷумла ба адади 641 тақсимшавии ифодаи $F_5 = 2^{2^5} + 1 -$ ро исбот кард.

Исботи Л. Эйлер ба назарияи муқоисаҳо такя мекунад $[46, \text{с.}\ 19 - 37]$. Баъдтар математики сейлонӣ (Шриланкагӣ) Канагасабапахти адади таркибӣ будани $F_5 -$ ро бо роҳи элементарӣ исбот кард, ки он чунин аст:

$$2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 2^4 \cdot 2^{28} + 1 = 15 \cdot 2^{28} + (3 + 5^3) \cdot 2^{21} + 1 =$$
$$= 15 \cdot 2^{28} + 3 \cdot 2^{21} + 5^3 \cdot 2^{21} + 1 = 3 \cdot 2^{21}(5 \cdot 2^7 + 1) + (5 \cdot 2^7)^3 +$$
$$+1^3 = 3 \cdot 2^{21}(5 \cdot 2^7 + 1) + (5 \cdot 2^7 + 1) \cdot (5^2 \cdot 2^{14} - 5 \cdot 2^7 + 1) =$$
$$= (5 \cdot 2^7 + 1) \cdot [3 \cdot 2^{21} + 5^2 \cdot 2^{14} - 5 \cdot 2^7 + 1].$$

$5 \cdot 2^7 + 1 = 641$, барои ҳамин адади $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ ба адади $641$ тақсим мешавад $[137, \text{с.}\ 62]$.

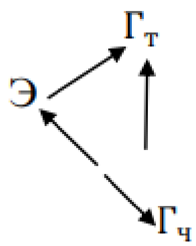
Даври навбатии инкишофи усули «Ғалбери Эратосфен» ба Л. Эйлер тааллуқ дорад: «Ӯ соли 1733 мафҳуми нишондиҳандаеро ҷорӣ кард, ки он ба ададҳо тааллуқ дошт. Л. Эйлер назарияи тафриқаҳо, шаклҳои квадратиро омӯхта, теоремаи хурди Фермаро исбот ва умумӣ кард. Назарияи тақсимшавии ададҳои бутун ба ӯ имкон дод, то ошкор созад, ки шакли ноошкори назарияи муқоисакунӣ-ҷудокунии адади бутун ба маҷмуи прогрессияҳои арифметикӣ оварда мерасонад. Корҳои Эйлерро соли 1801 К.Ф. Гаусс (солҳои 1777-1855) ба системаи муайян даровард» [137, с. 9].

Зикри дигари «Ғалбери Эратосфен» оид ба ададҳои бо тартиби пайдарпаии ададҳои натуралӣ дар боби XVII асарҳои мунтахаб бо номи «Муқадима дар бораи арифметика»-и файласуфи римӣ, донишманд, риҷоли давлатӣ Анисия Манилия Северина Боэсия (солҳои 480-525) во мехӯрад. Асарҳои Боэсия барои барқарор кардани мафҳуми азбайнрафтаи маъсалаи таҳқиқоти илмӣ, қабл аз ҳама, тарҷумаи озоди ба забони лотинии корҳои Аристотел, Евклид, Никомах ва дигарон равона карда шуданд. Аз ин рӯ, чизи наверо дар худ надорад ва ғалбери Эратосфен аз ин қатор истисно нест. Корҳои математик Боэсия ба таври пурра соли 1767 бо забони асл аз чоп баромадаанд.


Христиан Голдбах (1690-1764)

*Аз таърихи омӯзиши муаммои Голдбах-Эйлер.* Яке аз муаммоҳои машҳуре, ки ададҳои сода ба он мансуб аст, муаммои Голдбах мебошад. Соли 1742 академики Петербург Х. Голдбах (1690-1764) дар мактуби ба Л. Эйлер (1707-1783) фиристодаи худ масъалае гузошта буд, ки он чунин аст: «ҳар як адади бутуни аз 6 калон ё баробарро метавонем ҳамчун ҷамъи се адади сода ифода кунем» [71, 30, с. 18-19]. Л. Эйлер дар ҷавоб бовариашро ба дурустии ин теорема баён намуда навишт, ки: «ҳар як адади ҷуфти аз 2 калонро бо суммаи ду адади сода» [71, 30, с. 18-19] ифода кардан мумкин аст (изҳороти Х. Голдбах ва Л. Эйлер дар матн бо баъзе тавзеҳот оварда шудаанд). Дарвоқеъ, дар мактуби Х. Голдбах ба Л. Эйлер, аз 7 июни соли 1742, мо чунин изҳоротро мебинем: «ба назар чунин мерасад, ки ҳадди аққал ҳар як адади аз як зиёд ҷамъи се адади сода аст» [71, 30, с. 18-19]. Л. Эйлер дар номаи ҷавобии худ, аз 30 июни соли 1742, дар ин бора навиштааст: «аммо, ҳар як адад, ҷамъи ду адади сода аст, ман инро як теоремаи мукаммали дуруст мешуморам, гарчанде ки ман инро исбот карда наметавонам» [71, 30, с. 18-19]. Иқтибосҳо аз номаҳо дар тарҷумаи Д.А. Грав оварда шудаанд.

Агар тасдиқоти Х. Голдбахро ба ду тасдиқот ҷудо намоем, барои ададҳои ҷуфт бо ($Г_ч$) ва барои ададҳои тоқ бо ($Г_т$), он гоҳ ба туфайли вобастагии байни онҳо ва байни онҳою гипотезаи Л. Эйлер (Э) схемаи зерин пайдо мегардад:




Расми 4.

дар ин ҷо тирча маънои «натиҷа мебарояд»-ро дорад. Дар ҳақиқат: «агар ба ҳар як адади ҷуфти $\geq 4$ адади содаи 2-ро илова намоем, он гоҳ боз адади ҷуфти $\geq 6$ ҳосил мешавад. Аз ин ҷо дида мешавад, ки гипотезаи Л. Эйлер дар бораи он, ки ҳар гуна адади ҷуфти $\geq 4$ суммаи ду адади сода ба ҳисоб меравад, моро ба натиҷае меорад, ки ҳар гуна адади ҷуфти $\geq 6$-ро дар намуди суммаи се адади сода навиштан мумкин аст, яъне ба тасдиқоти Х. Голдбах барои ададҳои ҷуфт меоем» [55, 71].

Аз тарафи дигар, бо истифода аз гипотезаи Х. Голдбах барои ададҳои ҷуфт, бояд фарз кунем, ки яке аз ҷамъшавандаҳо адади содаи ҷуфт ба шумор меравад, яъне ба 2 баробар мебошад. Ҳамин тариқ, тасдиқ карда метавонем, ки ҳар гуна адади ҷуфти $\geq 4$ суммаи ду адади сода ба ҳисоб меравад [19, с. 81-88]. Мо тасдиқоти Л. Эйлерро ҳосил намудем. Ҳамин тавр, тасдиқоти Х. Голдбах барои ададҳои ҷуфт ба тасдиқоти Л. Эйлер баробарқувваанд.

Аз гипотезаҳои Л. Эйлер (ё ки гипотезаҳои ба он баробарқувваи Х. Голдбах барои ададҳои ҷуфт), чунин натиҷа мебарояд, ки ҳар гуна адади тоқи $> 6$-ро дар намуди суммаи се адади сода овардан мумкин аст.

Барои ин кифоя аст, ки ба ҳар як адади ҷуфти $\geq 4$ адади 3 - ро илова намоем.

Мо тасдиқоти Х. Голдбахро барои ададҳои тоқ ҳосил намудем. Вобаста ба он натиҷаи охирон нишон медиҳад, ки гипотезаи Х. Голдбах бо гипотезаи Л. Эйлер барои ададҳои ҷуфт (ё ки ба гипотезаи ба он баробарқувваи Л. Эйлер) баробарқувва аст.

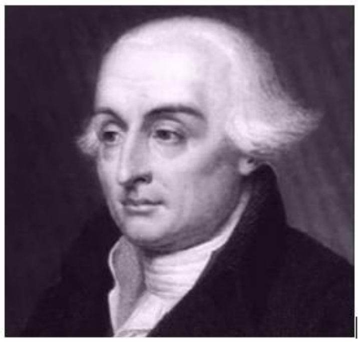
Қайд кардан ба маврид аст, ки аз гипотезаи Х. Голдбах барои ададҳои тоқ гипотезаи Л. Эйлер натиҷа намебарояд; аз он фақат натиҷа мебарояд, ки барои дилхоҳ адади ҷуфти $\geq 10$ чор ҷамъшавандаҳои сода кифоя аст.

Дар охир қайд мекунем, ки бо дида баромадани адади ҷуфти $\geq 6$ ва адади тоқи $\geq 9$, тасдиқоти Л. Эйлер ва тасдиқоти Х. Голдбахро барои ададҳои тоқ мумкин аст, мувофиқан чунин шарҳ диҳем:

Тасдиқоти Л. Эйлер: «ҳар гуна адади ҷуфти $\geq 6$ суммаи ду адади тоқи сода аст» [71, с. 278-280]

Тасдиқоти Х. Голдбах барои ададҳои тоқ: «ҳар гуна адади тоқи $\geq 9$ суммаи се адади содаи тоқ аст» [71, с. 278-280].

Ғайр аз ин, фарзияи Х. Голдбахро ба таври зерин ифода кардан мумкин аст: «ҳар як адади бутуни аз 1 калон ҷамъи на камтар аз се адади сода аст» [71, с. 278-280].



Ж. Л. Лагранж (1736-1813)

*Аз таърихи омӯзиши муаммои Варинг.* Теоремаи Ж.Л. Лагранж (1736-1813) дар бораи тасвири ададҳои натуралӣ чун суммаи на зиёда аз чор квадратҳои ададҳои натуралӣ мебошад. Соли 1770 аз тарафи математики англис Э. Варинг, ҳолати умумии он, оид ба базиси охирноки тартиби G(n) қатори ададҳои натуралӣ будани пайдарпайии дараҷаҳои фиксиронидашудаи $n$ −и ададҳои натуралӣ пешниҳод шуд, ки тасвири дилхоҳ ададi натуралии кифоя калони $N$ –ро дар намуди

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_r^n = N,$$

ифода кардан мумкин аст, ки дар он $x_1, x_2, \cdots, x_r$ – ададҳои натуралӣ буда, миқдорашон аз ифодаи муайяни $G(n)$ зиёд намебошанд ва $G(n)$ тартиби базисии пайдарпайии $\{x^n\}$ ё функсияи Г.Г. Харди (1877-1947) номида мешавад [126, с. 13-31].

Г. Г. Харди (1877-1947)

Ба ғайр ин, М. Мерсенн соли 1644 бе исбот гуфт, ки ҳангоми ададҳои $p = 13, 17, 19, 31$ будан формулаи намуди $(2^p - 1)$ адади сода мешавад. Соли 1772 аввалин шуда Л. Эйлер исбот кард, ки адади Мерсенн $2^{31} - 1$= 2 147 483 647 адади сода аст.

Дар асри XVIII Л. Эйлер бисёр теоремаҳои марбут ба ададҳои содаро исбот кард. Л. Эйлер ва Вилгелм Готфрид Лейбнитс (1646-1716) новобаста аз якдигар теоремаи хурди Фермаро исбот карданд: «*агар p адади сода бошад ва* $a$ *ададе бошад, ки ба p тақсимнашаванда бошад, пас* $a^p - 1$ *ба p тақсим мешавад*» [26, с. 43-53].

Ба ғайр ин, Л. Эйлер фарзияҳои П. Фермаро доир ба адади сода будани адади намуди $F_n = 2^n + 1$ –ро рад кард. Л. Эйлер инчунин нишон дод, ки қатори беохири аз ададҳои сода тартибёфтаи намуди $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$ дуршаванда мебошад, яъне қатор ҳисобнашаванда аст. Ва ниҳоят математик ва файласуфи олмонӣ Кристиан Голдбах (1690-1764), дар мактуби худ ба Л. Эйлер, фарзияи бо номи гипотезаи К. Голдбахро, ки: «*доир ба ифодаи ҳар як адади ҷуфти аз 2 калонро, ҳамчун ҷамъи ду адади сода навиштан мумкин аст*» [40], таҳия намуд. Ин фарзия ҳанӯз исбот нашудааст.

Соли 1774 Л. Эйлер шаклдигаркунии «Ғалбери Эратосфен» - ро дар шакли амалӣ ва шавқовар пешниҳод намуд [133, с.9]. Ин шаклдигаркунии

Эйлерро метавон ҳамчун идомаи ғояҳои Г.Ф. Лейбнис шумурд. Дар шакли прогрессияи намуди 30k+ r, ки КТУ (30, r)=1 аст, пешниҳод намуд, ки ҳамаи ададҳои содаро, ба ғайр аз 2, 3 ва 5 метавон бо воситаи ҷадвал нишон дод. Адади 30 бо 8 адад байни ҳам сода мебошанд, 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Бинобар он, ададҳои содаро дар шакли прогрессияҳои

$$30k+1, 30k+7, 30k+11, 30k+13, 30k+17, 30k+19, 30k+23 \text{ ва } 30k+29$$

дида баромад. Ададҳои сода, ки мувофиқи прогрессияҳо пайдо мешаванд бо p ифода шуда, дар ҷадвал тақсимкунандаи одии хурдтарин нишон дода мешавад. Ин ҷадвал ғалбери Эйлер буда ҳангоми сохтани ҷадвали ададҳои сода ва ёфтани тақсимкунандаи хурдтарин аҳамияти калон дорад.

Ҷадвали Эйлер оид ба муайян намудани ададҳои сода ба ғайр аз 2, 3, 5 ва ёфтани тақсимкунандаи хурдтарини сода барои ифодаи 30k+ r, ҳангоми КТУ (30, r)=1 будан намуди зеринро мегирад:

| $q$ \ $r$ | 1 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | p | p | P | P | P | p | p | p |
| 1 | p | p | p | P | P | 7 | p | p |
| 2 | p | p | p | P | 7 | p | p | p |
| 3 | 7 | p | p | P | P | p | p | 7 |
| 4 | 11 | p | p | 7 | P | p | 11 | p |
| 5 | p | p | 7 | P | P | 13 | p | p |

Ҷадвали 4.

Л. Эйлер ҳангоми ҷудокунии ададҳои сода аз ғалбери Эратосфен истифода бурда, ҷадвали ададҳои сода ва тақсимкунандаи аз ҳама хурди ададҳои таркибиро (ғайр аз як) нишон дод. Инро дар мисоли зерин дида мебароем.

Мисол. Ҳангоми $q=3$ будан

$$n = 30 \cdot 3 + 1 = 91 = 7 \cdot 13,$$

$$n = 30 \cdot 3 + 29 = 119 = 7 \cdot 17,$$

инҳо ададҳои таркибӣ буда, ҳангоми

$$n = 30 \cdot 3 + 7, \;\; n = 30 \cdot 3 + 11, \;\; 30 \cdot 3 + 13,$$

$$n = 30 \cdot 3 + 17, \qquad 30 \cdot 3 + 19, \quad 30 \cdot 3 + 23,$$

инҳо ададҳои сода мешавад [137, с.8-9].

Адади сода ё адади таркибӣ будани адади додашудаи натуралиро муайян кардан, яке аз масъалаҳои мушкилтарин мебошад.

Масалан, баъзе ададҳои додашударо дар натиҷаи иваз кардани ягон рақамро ба адади дигар онро ба адади сода табдил додан мумкин аст. Масалан: 81-адади таркибӣ аст, агар 1-ро бо 3 иваз кунем, он гоҳ адади содаи 83 ҳосил мешавад. Вале, на ҳар гуна адад дар натиҷаи иваз кардани як рақамаш ба адади сода табдил меёбад. Масалан, адади 200 ҳангоми иваз кардани рақамҳояш ба адади сода табдил намешавад. Аз ин рӯ, саволи зерин пайдо мешавад: оё аз дилхоҳ ададҳои $n > 10$, ҳангоми иваз кардани ду рақамашон адади сода ҳосил кардан мумкин, ки ба ин ҷавоби пурра додан душвор аст [137, с.10].

Л. Эйлер адади 1 000 009-ро адади сода фикр карда буд. Баъдтар, барои тасдиқ кардани ин фикраш ӯ аз сари нав якчанд тарзи ҳисобҳо гузаронид ва нодурустии фикри аввалаш, яъне адади таркибӣ будани 1 000 009$= 293 \cdot 3413 -$ ро нишон дод.

Баъзе ададҳои натуралие мавҷуданд, ки адади сода ва ё адади таркибӣ буданашон то ҳол маълум нест. Ададҳои содае мавҷуданд, ки дар онҳо якчанд рақамҳои пайдарпаии охиронро (вале, пайдарпаи ҳамаашро не) хат зада адади нав ҳосил намоем, онҳо низ ададҳои сода мешаванд. Мисол. Адади 3793 адади сода буда, тарзе дар боло овардем, ҳосилкунии ададҳои 379, 37, 3 боз ададҳои сода мебошанд. Ин гуна ададҳои сода ададҳои одӣ номида мешаванд.

Дар ин ҷо пайдарпай ҷойгиршавии ададҳои одӣ ва пайдарпаии ададҳои содаро меорем:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 3797 | 37397 | 2399333 |
| 317 | 733 | 73331 | 7393931 |
| 599 | 23333 | 373393 | 7393933 |
| 797 | 23339 | 593993 | 23399339 |
| 2393 | 31193 | 719333 | 37337999 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3793 | 31379 | 739397 | 59393133 |
| | | 739399 | 73939133 |

Ҷадвали 5.

Мавҷуд набудани ададҳои одии аз 9 рақам ва аз он зиёди ададҳои сода исбот шудааст. Аз ҳамин сабаб, аз ҳама ададҳои калони ададҳои одӣ аз 8 рақам иборат буда, чорто ададҳои 8 - рақамаи дар ҷадвал ҷойдошта ададҳои одӣ мебошанд [137, с.10].

*Дар бораи бисёраъзогиҳое, ки дар қиматҳои натуралии тағйирёбандааш ададҳои содаро медиҳад.* Акнун дар бораи ёфтани формулаи умумии дар ҳамаи қиматҳои бутуни $x$ (ё ин ки камаш барои пайдарпаиҳои беохири ин тавр $x$) фақат ададҳои содаи гуногунро диҳанда, математикҳо саъю кӯшишҳо карда буданд, истода мегузарем.

Гарчанде ки ба ёфтани ин гуна формулаҳо аз қадим машғул шуда омада бошанд ҳам, то ҳол муваффақияте ба даст оварда нашудааст.

Формулаҳои гуногуне мавҷуданд, ки онҳо бузургии $x-$ро доранд ва барои қиматҳои гуногуни бутуни $x$ ададҳои содаро медиҳанд, дида мебароем;

1) бисёраъзогии $n^2+n+17$ ҳангоми $n=0,1,2,3,\cdots,16$ будан ададҳои сода мебошад, вале агар $n=17$ бошад адади таркибӣ ҳосил мешавад;

2) бисёраъзогии $n^2-n+41$ ҳангоми $n=0,1,2,3,\cdots,40$ будан ададҳои сода буда, $n=41$ бошад, адади таркибӣ ҳосил мешавад;

3) бисёраъзогии $2n^2+29$ ҳангоми $n=0,1,2,3,\cdots,28$ будан ададҳои сода мешавад, $n=29$ бошад адади таркибӣ ҳосил мешавад.

Бо ёрии формулаи $n^2-n+41$ ҳосилшавии нисфи ададҳои 2348 ададҳои сода буданаш исбот шудааст. Саволе ба миён меояд, ки чаро дар ифодаи $n^2-n+a$, ҳангоми $a>41$ ва $n=0,1,2,3,\cdots,a-2$ будан ададҳои сода ҳосил мешавад? Ба ин савол то ҳол ҷавоб ёфт нашудааст. Ҳамзамон, дар фосилаи $41< a<10^9$ мавҷуд набудани ададҳои сода исбот шудааст. Аммо ҳангоми $a=3,5,11,17$ будан ва барои ҳамаи $0\le n\le a-2$ аз ифодаи $n^2-n+a$ ҳосил шудани ададҳои сода исботи худро ёфтааст.

Мисол. Агар $a = 11$ дода шуда бошад, муайян намоед, ки сеаъзогии $n^2 - n + 11$ барои ҳамаи қиматҳои дар фосилаи $0 \leq n \leq a - 2$ мавҷудбуда ададҳои содаро ҳосил мекунад.

Ҳал. Дар мисол ба ҷои $a$ 11-ро гузошта дар фосилаи $0 \leq n \leq 9$ ададҳои содаро ҷустуҷӯ мекунем.

Дар сеаъзогии $n^2 - n + 11$ ба ҷои $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 -$ ро гузошта ададҳои содаро ҳосил мекунем:

$$n = 0, \quad 0^2 - 0 + 11 = 11,$$
$$n = 1, \quad 1^2 - 1 + 11 = 11,$$
$$n = 2, \quad 2^2 - 2 + 11 = 13,$$
$$n = 3, \quad 3^2 - 3 + 11 = 17,$$
$$n = 4, \quad 4^2 - 4 + 11 = 23,$$
$$n = 5, \quad 5^2 - 5 + 11 = 31,$$
$$n = 6, \quad 6^2 - 6 + 11 = 41,$$
$$n = 7, \quad 7^2 - 7 + 11 = 53,$$
$$n = 8, \quad 8^2 - 8 + 11 = 67,$$
$$n = 9, \quad 9^2 - 1 = 9 + 11 = 93.$$

Ҳамаи ададҳои сода дар фосилаи $0 \leq n \leq 9$ ёфта шуд.

Ҳангоми $n \leq 11000$ будан калонтарин адади содаи намуди $n^2 - n + 41$, ба 19421, 27941, 72491 баробар буда, 4506–то будани миқдори ин гуна ададҳои сода муайян гардидааст.

Сеъазогии $f(x) = x^2 - x + 41$ сеаъзогии Л. Эйлер ном дорад. Ин сеаъзогӣ муҳаррики ҳосил кардани ададҳои сода аст, чунки аз ин сеъазогӣ истифода бурда, якчанд сеаъзогии дигарро навиштан мумкин аст, ки ададҳои содаро ҳосил мекунад.

Мисол. 1. Нишон диҳед, ки сеаъзогӣ $f(2x - 40) = g(x) = (2x - 40)^2 - (2x - 40) + 41 = 4x^2 - 160x + 1600 - 2x + 40 + 41 = 4x^2 - 162x + 1681$ барои $1 \leq x \leq 40$ ҳамон ададҳои содаи аз $f(x)$ ҳосилшударо медиҳад.

Ҳал. Сеаъзогии $f(2x - 40) = 4x^2 - 162x + 1681$-ро дар фосилаи $1 \leq x \leq 40$ дида мебароем. Ҳангоми

$$x = 1, \quad f(2 \cdot 1 - 40) = 4 \cdot 1^2 - 162 \cdot 1 + 1681 = 1523,$$

$$x = 2, \quad f(2 \cdot 2 - 40) = 4 \cdot 2^2 - 162 \cdot 2 + 1681 = 1373,$$

…………………………………………………………………

$$x = 41, \quad f(2 \cdot 40 - 40) = 4 \cdot 40^2 - 162 \cdot 40 + 1681 = 1601.$$

Ҳамаи ададҳои содаи дар фосилаи $1 \leq x \leq 40$ ёфта шуд.

2. Сеаъзогии $h(x) = f(3x - 81) = 9x^2 - 489x + 6683$ ҳам дар фосилаи $1 \leq x \leq 40$ 40-то ададҳои содаро ҳосил мекунад. Вале $f(x)$ ва $h(x)$ 27-то ададҳои содаи умумӣ дорад.

3. Сеаъзогии $f(4x) = 16x^2 - 4x + 41$ дар фосилаи $0 \leq x \leq 40$ фақат 31-то ададҳои содаро медиҳад.

4. Сеаъзогии $4(x^2 - x + 41)$ ҳангоми $x = \frac{2n+1}{2}$ будан, дар фосилаи $0 \leq n \leq 19$, сеаъзогии $9(x^2 - x + 41)$ ҳангоми $x = \frac{3n+1}{3}$ будан, дар фосилаи $0 \leq n \leq 12$, сеаъзогии $16(9x^2 - 3x + 41)$ ҳангоми $x = \frac{2n+1}{2}$ будан, дар фосилаи $-6 \leq n \leq 19$, сеаъзогии $16(9x^2 - 3x + 41)$ бошад ҳангоми $x = \frac{2n+1}{4}$ будан, дар фосилаи $-5 \leq n \leq 20$ ададҳои содаро медиҳад.

5. Сеаъзогии квадратӣ $n^2 - 79n + 1601$ бошад, ҳангоми $n = 0, 1, 2, \cdots, 79$ будан ададҳои содаро медиҳад. Ҳангоми $n = 80$ бошад, адади таркибии $80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 41^2$ – ро медиҳад. Ин намуди бисёраъзогиро Л. Эйлер коркард намудааст. Илова бар ин, ӯ исбот кард, ки аз бисёраъзогии $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ барои ҳамаи қиматҳои ададҳои натуралии $x$ на ҳама вақт адади содаро ҳосил кардан мумкин [137, с.12].

Ҳарчанд таҳқиқот оид ба назарияи ададҳои сода зиёданд, масъалаҳои ҳалнашуда низ мавҷуданд.

Масалан, математикон медонанд, ки ягона ҷуфтҳои ададҳои сода, ки бо як фарқ мекунанд, ин ададҳо 2 ва 3 мебошанд. Вале маълум нест, ки оё шумораи беохири ҷуфтҳои ададҳои сода, ки бо адади 2 фарқ мекунанд, вуҷуд доранд ё не? Ин савол ҳанӯз исбот нашудааст.

Бисёре аз саволҳои ҷолибтарин дар бораи ададҳои сода, ҳам аз нуқтаи назари амалӣ ва ҳам назариявӣ, дар бар мегиранд, ки чанд адади сода ва кадом хусусиятҳоро доранд. Ҷавоб ба саволи одитарин - чанд адади содаи андозаи муайян мавҷуд аст - аз ҷиҳати назариявӣ ба ин савол бо роҳи ҳалли гипотезаи Б. Риман ҷавоб гирифтан мумкин аст.

Ҳоло роҳҳои хуби тахмин кардани ҷавоби дуруст ба бисёре аз ин саволҳо вуҷуд доранд. Дар айни замон тахминҳои математикҳо аз тамоми таҷрибаҳои ададӣ гузашта истодаанд ва барои такя кардан ба онҳо асосҳои назариявӣ мавҷуданд. Аммо, барои математикаи соф ва кори алгоритмҳои компютерӣ хеле муҳим аст, ки ин тахминҳо воқеан дуруст бошанд. Математикҳоро танҳо бо далелҳои раднашаванда комилан қонеъ гардонда метавонанд.

Агар ҳамаи ададҳои натуралиро паи ҳам нависем, зичии нисбии ададҳои сода дар ин қатор торафт кам мешавад: шумораи онҳо дар 10 адади аввали қатор 4-то, яъне 40%; дар 100 адад 25-то, яъне 25%; барои 1000 адад 168-то, яъне 17%; барои миллион адад 78 498-то, яъне 8% ва ғайра, аммо ба ин нигоҳ накарда миқдори онҳо беинтиҳост. Дар байни ададҳои сода ҷуфти ададҳое вомехӯранд, ки фарқашон ба 2 баробар аст (онҳоро «ҷуфтҳои сода» — «экизакҳо» меноманд). Боинтиҳо ва беинтиҳо будани миқдори ин гуна ададҳо то ҳол исбот нашудааст. Ҷойгиршавии ададҳои сода дар қатори ададҳои натуралӣ яке аз муаммоҳои аввалини назарияи ададҳои сода ба ҳисоб мерафт. Омӯзиши ин масъала боиси ба вуҷуд омадани алгоритм (қоида)-е гардид, ки барои тартиб додани ҷадвали ададҳои сода имконият дод (ниг. «Ғалбери Эратосфен»). Евклид дар «Усул» ном асараш қоидаи ҳисоб кардани калонтарин тақсимкунандаи ду адад (алгоритми Евклид)-ро нишон дод, ки аз он дар бораи ба зарбшавандаҳои содаи якқимата ҷудо намудани ададҳои натуралӣ теоремае бармеояд. «П. Ферма (асри XVII) дар назарияи муодилаҳои диофантӣ ва назарияи ба тақсимшавандагии ададҳо алоқаманд кашфиёти бузурге ба амал овард (ниг. Теоремаи бузурги Ферма). Таҳқиқоти П. Фермаро доир ба тақсимшавандагии ададҳо давом дода, Л. Эйлер теоремаеро исбот кард, ки ба ном теоремаи хурди Ферма гардид» [26]. Ба ном теоремаи бузурги Фермаро низ барои $n = 3$ Л. Эйлер исбот намудааст. Л. Эйлер усулҳои таҳлили математикиро барои ҳалли масъалаҳои назарияи ададҳо истифода бурд. Дар натиҷа методи функсияҳои ҳамзарби Л. Эйлер ба вуҷуд омад ва бо ёрии ин метод як қатор масъалаҳои муҳимми назарияи ададҳоро ҳал кард. Л. Эйлер теоремаеро дар бораи беинтиҳоии ададҳои содаи Евклид бо усули нав исбот намуд, ки он баъдтар асоси назарияи дзета-функсияҳо гардид. Гузориши нахустин масъалаҳои аддитивӣ (яъне масъалаҳои бо амали ҷамъ алоқаманд) бо ададҳои сода ба Л. Эйлер ва Х. Голдбах мансуб аст.

Солҳои дароз математикҳо кӯшиш намуданд, ки формулаи умумӣ ҳосил кунанд, аз маҷмуи ададҳои натуралӣ ададҳои содаро муайян намоянд. Яке аз ин корҳо бо номи теоремаи Вилсон маълум буда ба шарофати математики англис Ҷ. Вилсон (1741-1793) [39] чунин унвон гирифтааст:

«Теорема. Агар р-адади сода бошад, он гоҳ $(\mathrm{p}-1)!+1$ ба р тақсим мешавад» [71, с. 123-130].

Ин теоремаро бори нахуст Ибни ал-Ҳайсам (965-1039) тақрибан дар соли 1000-и мелодӣ ҳосил карда буд [39] ва дар соли 1770 математики англис Э. Варинг (1734-1798) ин теоремаро дар асари худ «Meditationes Algebraicae», ки дар Кембриҷ нашр шудааст, бе исбот овардааст. Ба гуфтаи ӯ, теорема ба шогирди ӯ Ҷ. Вилсон тааллуқ дорад. Вай далели теоремаро танҳо дар нашри сеюми «Meditationes» дар соли 1782 нашр кард. Аввалин далели теоремаи Вилсон соли 1771 аз тарафи Лагранж [110] дода шудааст.

Дар ҷадвали зерин дорои арзишҳои ҳисобшуда $(p-1)!$ барои ададҳои содаи $p$ аз 2 то 37, инчунин бақияҳои тақсими аз $(p-1)!$ ба $p$ (бақияҳои тақсими $m$ ба р ҳамчун $m \; mod \; p$ ишора мешавад) оварда шудааст. Ададҳои сода бо ранги сабз нишон дода шудаанд.

| Ҷадвали бақияҳо аз модули $n$ | | |
|---|---|---|
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 2 |
| 4 | 6 | 2 |
| 5 | 24 | 4 |
| 6 | 120 | 0 |
| 7 | 720 | 6 |
| 8 | 5040 | 0 |
| 9 | 40320 | 0 |
| 10 | 362880 | 0 |
| 11 | 3628800 | 10 |
| 12 | 39916800 | 0 |
| 13 | 479001600 | 12 |
| 14 | 6227020800 | 0 |
| 15 | 87178291200 | 0 |
| 16 | 1307674368000 | 0 |
| 17 | 20922789888000 | 16 |
| 18 | 355687428096000 | 0 |
| 19 | 6402373705728000 | 18 |
| 20 | 121645100408832000 | 0 |
| 21 | 2432902008176640000 | 0 |
| 22 | 51090942171709440000 | 0 |
| 23 | 1124000727777607680000 | 22 |
| 24 | 25852016738884976640000 | 0 |
| 25 | 620448401733239439360000 | 0 |
| 26 | 15511210043330985984000000 | 0 |
| 27 | 403291461126605635584000000 | 0 |
| 28 | 10888869450418352160768000000 | 0 |
| 29 | 304888344611713860501504000000 | 28 |
| 30 | 8841761993739701954543616000000 | 0 |
| 31 | 265252859812191058636308480000000 | 30 |
| 32 | 8222838654177922817725562880000000 | 0 |
| 33 | 263130836933693530167218012160000000 | 0 |
| 34 | 8683317618811886495518194401280000000 | 0 |
| 35 | 295232799039604140847618609643520000000 | 0 |
| 36 | 10333147966386144929666651337523200000000 | 0 |
| 37 | 371993326789901217467999448150835200000000 | 36 |

Чадвали 6.

Соли 1867 Лендри ҳангоми n ≤ 64 будан, ҷадвали ба зарбшавандаҳо ҷудо кардани ададҳои намуди $(2^n + 1)$ ва $(2^n - 1)$ – ро сохта, нишон дод, ки адади $2^{32} + 1$ ба адади 641 тақсим мешавад. Вай мушкил будани ба зарбшавандаҳо ҷудо намудани адади $2^{58} + 1$ – ро, қайд кардааст. Тақсимкунандаи адади $2^{58} + 1$ будани адади d = 57 646 075 230 342 349 - ро нишон додааст. Аввал Лендри фикр кардааст, ки ин адад адади сода аст. Баъдтар исбот мекунад, ки ин адад ба зарби ду ададе, ки ҳар яктоаш аз нуҳ рақам иборат аст, ҷудо мешавад.

Теоремаи зеринро исбот кардааст.

**Теоремаи Лендри.** Барои он, ки адади $n = 2^k + 1$ сода бошад, зарур ва кифоя аст, ки адади $3^{\frac{n-1}{2}} + 1$ ба n тақсим шавад.

**Мисол.** 1. Адади $5 = 2^2 + 1$ – адади сода аст, чунки адади $3^{\frac{5-1}{2}} + 1 = 3^2 + 1 = 10$ ба 5 тақсим мешавад.

2. Адади $n = 2^3 + 1 = 9$ таркибӣ мебошад, чунки адади $3^{\frac{9-1}{2}} + 1 = 3^4 + 1 = 82$ буда, вай ба 9 тақсим намешавад.

Франсел ном математик дуруст будани ҷудошавии зеринро нишон дод:

$$2^6 + 1 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2),$$
$$2^{10} + 1 = (3^2 + 4^2)(5^2 + 4^2).$$

Баъди исботи нодуруст будани гипотезаи Ферма, яъне «адади $F_n = 2^{2^n} + 1$ барои ҳамаи ададҳои натуралии $n$, адади сода аст», ду масъалаи зерин ба миён омад:

1) ададҳои содаи П. Ферма чӣ қадар аст?

2) ададҳои таркибии П. Ферма чӣ қадар аст?

Дар боло нишон додем, ки ҳангоми n = 1, 2, 3, 4 будан, адади П. Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$, адади сода ва ҳангоми $n = 5$ будан адади таркибӣ мебошад. То имрӯз ҳангоми $n > 4$ будан ягонто адади содаи П. Ферма ёфта нашудааст ва исбот ҳам карда нашудааст, ки ҳангоми $n > 4$ будан ягонто адади содаи П. Ферма вуҷуд надорад. Вале ғайр аз $n = 5$

будан, дар дигар қиматҳои n ададҳои таркибии П. Ферма вуҷуд дорад. Масалан, нишон дода шудааст, ки $F_6 = 274\,177 \cdot 67\,280\,421\,310\,721$, яъне адади $F_6$ адади таркибӣ аст.

Инчунин исбот карда шудааст, ки адади $F_9$ ба адади $37 \cdot 2^{16} + 1$, адади $F_{12}$ ба адади $7 \cdot 2^{14} + 1\,397 \cdot 2^{16} + 1$ ва $7 \cdot 139 \cdot 2^{16} + 1$, адади $F_{18}$ ба адади $16\,772\,161 = 5 \cdot 2^{25} + 1$, адади $F_{36}$ ба адади $5 \cdot 2^{39} + 1$, адади $F_{38}$ ба адади $3 \cdot 2^{41} + 1$ ва адади $F_{73}$ ба адади $5 \cdot 2^{75} + 1$ тақсим мешавад [137, с. 61-70].

Аз 368 хона иборат будани адади содаи $M_{1279} -$ и Мерсенн муайян гардид. Аз ин пеш адади содаи $M_{127} -$ и Мерсенн аз 39 хона иборат буда, дар давоми 75 сол аз ҳама адади калонтарин ҳисобида мешуд.

Адади $2^{257} - 1 = 231584178947632390847141970017375845706539969331128112807891516801582625927987 1$ ҳисоб шуд.

Адади $2^{5002331} - 1$ зиёда аз 1,5 миллион рақам иборат буда, тақсимкунандаи он ба адади 10004663 муайян шудааст. Аз адади $p = 521$ сар карда, ададҳои содаи Мерсенн бо ёрии мошинаи электронии ҳисобарор исбот шудааст.

Барои муайянкунии сода ё таркибӣ будани адади Мерсенн теоремае мавҷуд аст, ки он дар илми математика ба номи «теоремаи Люк-Лемер» маълум буда, соли 1878 аз тарафи математики фаронсавӣ Э. Люк (1842-1891) ва соли 1930 аз тарафи математики амрикоӣ Д.Г. Лемер (1905-1991) исбот шудааст [50]:

Теоремаи Е. Люк-Д.Х. Лемер. Адади $\mathrm{M_p}$, ки $\mathrm{p} > 2$ аст, фақат ва фақат дар он мавриде сода мешавад, агар аъзои $(\mathrm{p} - 1) -$ уми $(\mathrm{S_{p-1}})$ пайдарпаии рекурентии (формулаҳое, ки онҳо барои ифода кардани аъзоҳои ояндаи (бо рақами калон) пай дар пай бо аъзоҳои пешгузаштаашон (бо рақами хурд) имконият медиҳанд, рекурентӣ номида мешавад)

$$S_1 = 4, S_2 = 14, \cdots, S_{k+1} = S_k^2 - 2, k = 1, 2, 3, \cdots$$

ба $M_p$ тақсим шавад.

Аъзоҳои якуми ин пайдарпаӣ 4, 14, 194, 1416, 37634, 317954, ... ва ғайра (пайдарпаии Люк) [110, с. 42-46].

Адади сода будани $M_{4423}$ бо чунин тарз нишон дода шудааст. Пайдарпаии дар боло овардашудаи аъзои $p - 1 = 4423 - 1 = 4422$-ро ёфта, ба $M_{4423} = 2^{4423} - 1$ бебақия тақсимшавии ин адад нишон дода шудааст.

Бо ҳамин усул адади таркибӣ будани адади 31 – рақамаи $M_{101}$ нишон дода шудааст, чунки бо усули ҳисоб кардани 100 аъзои пайдарпаӣ ба $M_{101}$ тақсим нашудаанд.

Люк теоремаи дар боло овардашударо истифода бурда, адади сода будани $2^{127} - 1$ – ро нишон дод. Барои ин Люк нишон дод, ки ифодаи $2^{127} - 1 = 17014118346016923173168730371588441$ пайдарпаии 05727 тақсимкунандаи аъзои 126 аст [25, 50].

Гипотезаи зерин ҳам мавҷуд аст:

Ҳамаи ададҳои дар намуди $p_1 = 3$; $p_{n+1} = 2^{p_n} - 1$ мавҷуда ададҳои сода аст.

Мисол. $p_1 = 3$; $p_2 = 2^3 - 1 = 7$; $p_3 = 2^7 - 1 = 127$; $p_4 = 2^{127} - 1$ – адади сода ва ғайра.

Паҳншавии канроникии ададҳои таркибии Мерсенн ҳам ададҳои сода дар 1 ҷадвал, ё ин ки гипотезаи адади квадратдор мавҷуд нест.

Люк ҷадвали зеринро сохт:

| p адади сода | $2^p - 1$ Адади Мерсенн | $d > 1$ тақсимкунанда | Ҳолати $2^p - 1$ |
|---|---|---|---|
| 11 | $2^{11} - 1$ | 23 | Таркибӣ |
| 13 | $2^{13} - 1$ | Худи адад | Адади сода |
| 17 | $2^{17} - 1$ | Худи адад | Адади сода |
| 19 | $2^{19} - 1$ | Худи адад | Адади сода |
| 23 | $2^{23} - 1$ | 47 | Таркибӣ |
| 29 | $2^{29} - 1$ | 233 | Таркибӣ |
| 31 | $2^{31} - 1$ | Худи адад | Адади сода |
| 37 | $2^{37} - 1$ | 233 | Таркибӣ |
| 41 | $2^{41} - 1$ | 13367 | Таркибӣ |
| 43 | $2^{43} - 1$ | 431 | Таркибӣ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 47 | $2^{47}-1$ | 2351 | Таркибӣ |
| 53 | $2^{53}-1$ | 6361 | Таркибӣ |
| 59 | $2^{59}-1$ | 179951 | Таркибӣ |
| 61 | $2^{61}-1$ | Худи адад | Адади сода |
| 67 | $2^{67}-1$ | ? | Таркибӣ |
| 71 | $2^{71}-1$ | 223479 | Таркибӣ |
| 73 | $2^{73}-1$ | 439 | Таркибӣ |
| 79 | $2^{79}-1$ | 2687 | Таркибӣ |
| 83 | $2^{83}-1$ | 167 | Таркибӣ |
| 89 | $2^{89}-1$ | Худи адад | Адади сода |
| 97 | $2^{97}-1$ | 11447 | Таркибӣ |
| 101 | $2^{101}-1$ | ? | Таркибӣ |
| 103 | $2^{103}-1$ | ? | Таркибӣ |
| 107 | $2^{107}-1$ | Худи адад | Адади сода |
| 109 | $2^{109}-1$ | 745188807 | Таркибӣ |
| 113 | $2^{113}-1$ | 3391 | Таркибӣ |
| 127 | $2^{127}-1$ | Худи адад | Адади сода |
| 131 | $2^{131}-1$ | 263 | Таркибӣ |
| 137 | $2^{137}-1$ | ? | Маълум нест |
| 139 | $2^{139}-1$ | ? | Маълум нест |
| 149 | $2^{149}-1$ | ? | Маълум нест |
| 151 | $2^{151}-1$ | 18121 | Таркибӣ |
| 157 | $2^{157}-1$ | 852133201 | Таркибӣ |
| 163 | $2^{163}-1$ | 150283 | Таркибӣ |
| 173 | $2^{173}-1$ | 730753 | Таркибӣ |
| 179 | $2^{179}-1$ | 359 | Таркибӣ |
| 181 | $2^{181}-1$ | 43441 | Таркибӣ |
| 191 | $2^{191}-1$ | 383 | Таркибӣ |
| 193 | $2^{193}-1$ | ? | Таркибӣ |
| 197 | $2^{197}-1$ | 7487 | Таркибӣ |
| 199 | $2^{199}-1$ | ? | Маълум нест |
| 211 | $2^{211}-1$ | 15193 | Таркибӣ |
| 223 | $2^{223}-1$ | 18287 | Таркибӣ |
| 227 | $2^{227}-1$ | ? | Маълум нест |
| 229 | $2^{229}-1$ | ? | Маълум нест |
| 233 | $2^{233}-1$ | 1399 | Таркибӣ |
| 239 | $2^{239}-1$ | 479 | Таркибӣ |
| 241 | $2^{241}-1$ | ? | Маълум нест |
| 251 | $2^{251}-1$ | 503 | Таркибӣ |
| 257 | $2^{257}-1$ | ? | Маълум нест |

Ҷадвали 7.

Дар ин ҷадвал барои ифодаи ададҳои содаи $(2^p-1)$ ё ададҳои сода ё ададҳои таркибӣ буданаш нишон дода шудааст.

Барои ададҳои $p$ таркибӣ будани ифодаи $(2^p-1)$ маълум бошад ҳам, вале то ҳол аниқ будани тақсимкунандаи $d>1$ нишон дода нашудааст. Барои баъзе ададҳои $p$ тақсимкунандаи $d > 1$ нишон дода шудааст. Ин ҷадвал фақат барои ададҳои содаи $p = 11$ то $p = 257$ сохта шудааст. Таркибӣ будани бисёр ададҳои М. Мерсенн дар намуди $2^n - 1$ исбот шудааст:

«Дар ҷадвали зер бузургтарин ададҳои сода аз рӯи тартиби ҳосилгардидаашон оварда шудааст, ки онҳо чӣ тавре дар боло қайд шуда буд, бо ёрии ифодаи $M_n = 2^n - 1$ муайян гардидаанд» [50].

| Адад | Шумораи ададҳои даҳӣ | Соли ҷойгиршавӣ |
|---|---|---|
| $M_{13}$ | 4 | 1456 |
| $M_{17}$ | 6 | 1460 |
| $M_{19}$ | 6 | 1588 |
| $M_{31}$ | 10 | 1772 |
| $M_{127}$ | 39 | 1876 |
| $180\times(M_{127})^2 + 1$ | 79 | 1951 |
| $M_{521}$ | 157 | 1952 |
| $M_{607}$ | 183 | 1952 |
| $M_{1279}$ | 386 | 1952 |
| $M_{2203}$ | 664 | 1952 |
| $M_{2281}$ | 687 | 1952 |
| $M_{3217}$ | 969 | 1957 |
| $M_{4423}$ | 1332 | 1961 |
| $M_{9689}$ | 2917 | 1963 |
| $M_{9941}$ | 2993 | 1963 |
| $M_{11\,213}$ | 3376 | 1963 |
| $M_{19\,937}$ | 6002 | 1971 |
| $M_{21\,701}$ | 6533 | 1978 |
| $M_{23\,209}$ | 6987 | 1979 |
| $M_{44\,497}$ | 13 395 | 1979 |
| $M_{86\,243}$ | 25 962 | 1982 |
| $M_{132049}$ | 39 751 | 1983 |
| $M_{216\,091}$ | 65 050 | 1985 |
| $391\,581\cdot2^{216\,193} - 1$ | 65 087 | 1989 |
| $M_{756\,839}$ | 227 832 | 1992 |
| $M_{859\,433}$ | 258 716 | 1994 |
| $M_{1\,257\,787}$ | 378 632 | 1996 |
| $M_{1\,398\,269}$ | 420 921 | 1996 |

| | | |
|---|---|---|
| $M_{2\,976\,221}$ | 895 932 | 1997 |
| $M_{3\,021\,377}$ | 909 526 | 1998 |
| $M_{6\,972\,593}$ | 2 098 960 | 1999 |
| $M_{13\,466\,917}$ | 4 053 946 | 2001 |
| $M_{20\,996\,011}$ | 6 320 430 | 2003 |
| $M_{24\,036\,583}$ | 7 235 733 | 2004 |
| $M_{25\,964\,951}$ | 7 816 230 | 2005 |
| $M_{30\,402\,457}$ | 9 152 052 | 2005 |
| $M_{32\,582\,657}$ | 9 808 358 | 2006 |
| $M_{43\,112\,609}$ | 12 978 189 | 2008 |
| $M_{57\,885\,161}$ | 17 425 170 | 2013 |
| $M_{74\,207\,281}$ | 22 338 618 | 2016 |
| $M_{77\,232\,917}$ | 23 249 425 | 2017 |
| $M_{82\,589\,933}$ | 24 862 048 | 2018 |
| $M_{136\,279\,841}$ | 41 024 320 | 2024 |

Ҷадвали 8.

**Бузургтарин даҳ адади содаи маълум**

| Ҷой | Адад | Кашфовар | Санаи кашф | Шумораи рақамҳо |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $2^{136\,279\,841} - 1$ | GIMPS | 12 октябри с. 2024 | 41 024 320 |
| 2 | $2^{82\,589\,933} - 1$ | GIMPS | 7 декабри с. 2018 | 24 862 048 |
| 3 | $2^{77\,232\,917} - 1$ | GIMPS | 26 декабри с. 2017 | 23 249 425 |
| 4 | $2^{74\,207\,281} - 1$ | GIMPS | 7 январи с. 2016 | 22 338 618 |
| 5 | $2^{57\,885\,161} - 1$ | GIMPS | 25 январи с. 2013 | 17 425 170 |
| 6 | $2^{43\,112\,609} - 1$ | GIMPS | 23 августи с. 2008 | 12 978 189 |
| 7 | $2^{42\,643\,801} - 1$ | GIMPS | 12 апрели с. 2009 | 12 837 064 |
| 8 | $2^{37\,156\,667} - 1$ | GIMPS | 6 сентябри с. 2008 | 11 185 272 |
| 9 | $2^{32\,582\,657} - 1$ | GIMPS | 4 сентябри с. 2006 | 9 808 358 |
| 10 | $10\,223 \times 2^{31\,172\,165} + 1$ | PrimeGrid | 6 ноябри с. 2016 | 9 383 761 |

Ҷадвали 9.

Барои қиматҳои калони $p$ муайян кардани он ки адади $M_p$ таркибӣ ё сода аст, ҳисобкунии бисёри дуру дарозеро талаб мекунад; ҳисоб карда шудааст, ки $M_{127}$ математики фаронсавӣ Е. Люк (1842-1891) (соли 1876), $M_{61}$(математики рус И.М. Первушин (1827-1900), соли 1883, $M_{89}$ ва $M_{107}$ (математики америкоӣ Р.Э. Поуэре (1875-1952), солҳои 1911 ва 1914), ададҳои содаанд.

То соли 1945 маълум набуд, ки кадоме аз ададҳои П. Ферма ҳангоми $n = 17, 19, 20, 21, 22, 24, \ldots$ будан адади сода ё ки таркибӣ аст.

Дар асоси ин теоремаи Д.Г. Лемер барои муайян кардани таркибӣ будани адади $2^{149} - 1$, 70 соат вақт сарф кард. Математики ҷавони шуравӣ М.И. Слободский (1947) тақсимшавии адади $2^{128099} - 1$ –ро ба адади 256199 муайян намуд.

Албатта, ин кори душвор буда, фақат бо мошинаи электронии ҳисобарор мисолҳоро санҷидан мумкин аст.

То соли 1953 исбот шудааст, ки адади Фермаи $F_n = 2^{2^n} + 1$, ҳангоми n = 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73 будан ададҳои таркибӣ мебошанд.

Соли 1953 муайян карда шудааст, ки тақсимкунандаи содаи адади Фермаи $F_{16}$ намуди $m = 218 \cdot 3\,150 + 1$ - ро дорад [52].

*Усули дигари ҷудокунии ададҳои сода.* Ҷудокунии ададҳои сода аз қатори ададҳои натуралӣ аз тарафи муҳандис Мирослов Соукуп, соли 1954, ки дар шаҳри Прага зиндагонӣ мекард, пешниҳод гардида, он чунин аст:

Маълум аст, ки агар ҳангоми $n$ адади аз адади аз 6 калонро ба 6 тақсим кардан бақияҳо 0, 2, 3, 4 ҳосил шавад, $n$ адади таркибӣ мешавад. Барои ҳамин, ададҳои содаро ҳангоми $n \neq 2, n \neq 3$ будан аз ифодаи $6n \pm 1$ ҷустуҷӯ кардан лозим.

$$n = 6km \pm (k + m) \qquad (k = 1,2,3, \ldots,\ m = 0,1,2, \ldots, k)$$

ва

$$n = 6km \pm (k - m) \qquad (k = 1,2,3, \ldots, \qquad m = 0,1,2, \ldots, k).$$

Аз инҳо истифода бурда ҷадвали зеринро месозем:

$$\left.\begin{array}{r} n = 6km \pm (k + m) = 96 \pm 8 \ldots \\ 54 \pm 6\ 72 \pm 7 \ldots \\ 24 \pm 4\ 36 \pm 5\ \ 48 \pm 6 \ldots \\ 6 \pm 2\ \ 12 \pm 3\ \ 18 \pm 4\ \ 24 \pm 5 \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6n + 1 - \\ \text{таркибӣ} \end{array}$$

$$0 \pm 1\ \ 0 \pm 2\ \ 0 \pm 3\ \ \ 0 \pm 4 \ldots$$

$$\left.\begin{array}{r} 6\pm 0 \;\; 12\pm 1 \;\; 18\pm 2 \;\; 24\pm 3 \ldots \\ 24\pm 0 \;\; 36\pm 1 \;\; 48\pm 2 \ldots \\ 54\pm 0 \;\; 72\pm 1 \ldots \\ n=6km\pm(k-m)=96\pm 0 \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6n-1- \\ \text{таркибӣ} \end{array}$$

Ҳангоми $k = 1$ будан $m = 0{,}1;$

$k = 2$ будан $m = 0{,}1,2;$

$k = 3$ будан $m = 0{,}1{,}2{,}3;$

қиматҳо қабул мекунад.

Ҳамон вақт маълум мешавад, ки агар адади сода будани адади $6n - 1$ дар қисми поёни ҷадвал $n$ набошад, адади сода будани $6n + 1$ ҳангоми дар қисми болои ҷадвал набурдани $n$ мутаҳид мегардад.

Мисол. 1) Адади $n = 13$ дар қисми болои ҷадвал вуҷуд надорад, пас

$$6 \cdot 13 + 1 = 79 - \text{адади сода аст.}$$

Адади $n = 13$ дар қисми поёни ҷадвал мавҷуд аст, барои ҳамин $6 \cdot 13 - 1 = 77$ – адади таркибӣ мебошад.

2) Адади $n = 149$ адади сода аст, чунки $149 = 6 \cdot 25 - 1$ ва адади 25 дар қисми поёнии ҷадвал нест.

3) $n = 229$ – адади сода аст, чунки $229 = 6 \cdot 38 + 1$ ва адади 38 дар қисми болоии ҷадвал нест.

4) $n = 187$ – адади таркибӣ аст, чунки $187 = 6 \cdot 31 + 1$ ва адади 31 дар қисми болоии ҷадвал мавҷуд аст [137, с. 7].

Тарзи дигари ҷудо кардани ададҳои сода чунин аст:

1 ва $n$-то ададҳои содаро гирифта, онҳоро бо роҳи дилхоҳ ба ду гурӯҳ ҷудо менамоем, ҳар як гурӯҳро зарб зада, ду намуди зарбшавандаҳо ҳосил мекунем ва сумма ё фарқи ин зарбшавандаҳоро месозем. Бо ёрии ҳосилшавии сумма ё фарқ квадрати ададҳои содаи $(n + 1)$ хурд бударо ҳосил мекунем.

Мисол. 1) 1 ва ададҳои содаи 2, 3, 5-ро ихтиёрӣ ба ду гурӯҳ ҷудо мекунем:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I гурӯҳ: } 2 \\ \text{II гурӯҳ: } 1, 3, 5 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 = 13; \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 = 17. \end{array}$$

Ададҳои 13 ва 17 баъди 5 аз квадрати адади содаи 7 хурд аст. Дар ин ҳолат ададҳои 13 ва 17 адади сода аст.

2) Аз 1 ва ададҳои содаи 2, 3, 5, 7, 11 истифода бурда, ададҳои содаи аз квадрати адади $13^2 = 169$ хурд бударо ҳосил мекунем.

$$\left.\begin{array}{l}\text{I гурӯҳ: } 3 \cdot 5 \\ \text{II гурӯҳ: } 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 = 154\end{array}\right\} \begin{array}{l}154 + 15 = 169 - \text{таркибӣ;} \\ 154 - 15 = 139 - \text{адади сода.}\end{array}$$

Гурӯҳҳои гуногун месозем:

$$\left.\begin{array}{l}\text{I гурӯҳ: } 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \\ \text{II гурӯҳ: } 1 \cdot 2 \cdot 11 = 22\end{array}\right\} \begin{array}{l}105 - 22 = 83 - \text{адади сода;} \\ 105 + 22 = 127 - \text{адади сода.}\end{array}$$

Эзоҳ. Агар фарқи ҳосилшудаи адад аз квадрати адади сода калон бошад, ин гуна адад мумкин адади сода набошад.

Мисол. 1 ва ададҳои содаи 2, 3, 5, 7-ро ихтиёрӣ ба ду гурӯҳ ҷудо мекунем:

$$\text{I гурӯҳ: } 1 = 1$$
$$\text{II гурӯҳ: } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$
$$210 - 1 = 209, \text{вале } 209 > 11^2.$$

Бо ин сабаб адади 209-ро адади сода гуфта наметавонем. Дар ҳақиқат $209 = 11 \cdot 19$ аст.

Мисоли 2. 1 ва ададҳои содаи 2, 3, 5, 7, 11-ро бо гурӯҳҳои гуногун ҷудо намуда, ҳамаи ададҳои содаи аз адади 169 хурдбударо меёбем.

$$\left.\begin{array}{l}\text{I гурӯҳ: } 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \\ \text{II гурӯҳ: } 7 \cdot 11 = 77\end{array}\right\} \begin{array}{l}77 - 30 = 47 - \text{адади сода;} \\ 77 + 30 = 107 - \text{адади сода,}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I гурӯҳ: } 3 \cdot 7 = 21 \\ \text{II гурӯҳ: } 2 \cdot 5 \cdot 11 = 110\end{array}\right\} \begin{array}{l}110 - 21 = 89 - \text{адади сода;} \\ 110 + 21 = 131 - \text{адади сода,}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I гурӯҳ: } 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42 \\ \text{II гурӯҳ: } 5 \cdot 11 = 55\end{array}\right\} \begin{array}{l}55 - 42 = 13 - \text{адади сода;} \\ 55 + 42 = 97 - \text{адади сода,}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I гурӯҳ: } 5 \cdot 7 = 35 \\ \text{II гурӯҳ: } 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66\end{array}\right\} \begin{array}{l}66 - 35 = 31 - \text{адади сода;} \\ 66 + 35 = 101 - \text{адади сода,}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{I гурӯҳ: } 3 \cdot 11 = 33 \\ \text{II гурӯҳ: } 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70\end{array}\right\} \begin{array}{l}70 - 33 = 37 - \text{адади сода;} \\ 70 + 33 = 103 - \text{адади сода.}\end{array}$$

Ҳамаи ададҳои содаи аз адади 169 хурд ёфта шуд [137, с.7].

Аз ҳамин лиҳоз, аз ҳама адади содаи калонтарини мерсенн, ки то замони ҳозираи мо маълум аст аз 12003 хонаи $M_{24} = 2^{19937} - 1$ иборат аст. Адади $M_{11213}$ адади сода буда, аз 3376 хона иборат будани онро соли 1963 ба ёрии мошинаи электронии ҳисобарор олим Доналд Ҷеллис нишон додааст.

То соли 1964 вуҷуд доштани 37-то ададҳои таркибии П. Ферма исбот карда шудааст. Инҳо ҳангоми n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 23, 36, 38, 39, 55, 58, 63, 73, 77, 81, 117, 125, 144, 150, 207, 226, 228, 250, 267, 268, 284, 316, 452, 1945 будан аз $F_n = 2^{2^n} + 1$ ҳосил мешаванд.

То ҳол исбот нашудааст, ки ададҳои таркибии П. Ферма беохиранд ё охирнок? Вале беохир будани ададҳои намуди $2^{2^n}+k$ $(k\neq1)$ аз тарафи А. Шинсел ном олим исбот карда шудааст.

Исбот мекунем, ки ягон адади П. Фермаро чун ҷамъи ду ададҳои сода тасвир кардан мумкин нест.

Маълум аст, ки адади $F_n = 2^{2^n} + 1$ ҳама вақт тоқ аст. Агар адади $F_n$ ҷамъи ду ададҳои сода $F_n = p_1 + p_2$ бошад, он гоҳ бояд $p_1 = 2$ ва $p_2 = F_n - 2 = 2^{2^n} + 1 - 2 = 2^{2^n} - 1$ шавад. Вале ҷудошавии

$$2^{2^n} - 1 = (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)$$

нишон медиҳад, ки $p_2$ адади сода шуда наметавонад. Пас, адади П. Фермаро чун ҷамъи ду адади сода тасвир кардан мумкин набудааст.

Адади таркибии П. Ферма $F_{1945} = 2^{2^{1945}} + 1$ дорои $10^{582}$ рақам буда, тақсимкунандаи содаи хурдтаринаш аз адади $5 \cdot 2^{1947} + 1$ иборат буда, ин адад дорои 587 рақам мебошад.

Муайян карда шудааст, ки адади 45 592 577, ки тақсимкунандаи адади П. Ферма $F_{10}$ ва тақсимкунандаи адади П. Ферма $F_{16}$ мебошад, адади 825 753 601 будааст.

Исбот карда шудааст, ки адади П. Ферма $F_{14}$ то адади $65\,536 \cdot 2\,000 + 1 = 130\,072\,001$ тақсимкунандаҳои намуди $p = k \cdot 2^{n+1} + 1$ надорад. Тақсимкунандаҳои содаи адади П. Ферма $F_{14}$ аз адади

131 072 001 калон аст. Ҷудокунии каноникии ададҳои $F_5$ ва $F_6$ ёфта шудааст. Маълум карда шудааст, ки адади Фермаи $F_{13}$ аз 2467 рақам иборат аст.

Муайян карда шудааст, ки адади П. Ферма ҳангоми $F_{452}$ аз $10^{135}$ рақам иборат буда, яке аз тақсимкунандаҳои он ба $27 \cdot 2^{455} + 1$ тааллуқ дошта, он дорои 139 рақам аст.

Ҳамин тавр, аз рӯи таҳқиқоти мо, то имрӯз аз ҳама калонтарин адади П. Ферма ин адади $F_{1945}$ аст.

Ададҳои таркибӣ будани ададҳои овардашуда, бо методҳои гуногуни математикӣ ё ки аз истифодабарии методҳои математикаи олӣ исбот карда шудааст [26].

## 2.2. Рушди назарияи ададҳои сода дар осори олимони рус

*Шаклтағйирдиҳии ғалбери Эратосфен.* Сабабҳои шаклтағйирдиҳии ғалбери Эратосфен ба масъалаҳои зерин вобаста аст:

– масъалаҳои ҷобаҷогузории меъёрии (кретерияи) содагии ададҳои натуралӣ;

– муайянкунии тақсимкунандаҳои ададҳои бутун;

– дар шакли аналитикӣ муайян намудани ададҳои сода;

– ифода ёфтани миқдори ададҳои сода дар фосилаи додашуда;

– тартиб додани ҷадвали ададҳои сода.

Инкишофи шаклтағйирдиҳии «Ғалбери Эратосфен»-ро ба гурӯҳҳои зерин ҷудо намудан мумкин аст: шаклтағйирдиҳии арифметикии «Ғалбери Эратосфен»; ёфтани қимати аниқ ё тақрибии функсияи $\pi(x)$. Қимати $\pi(x)$ миқдори ададҳои сода аз $1, 2, \cdots, x$ –ро ифода мекунад.

*Шаклтағйирдиҳии арифметикии «Ғалбери Эратосфен».* Математики фаронсавии асри XVI Жан Бронхор (солҳои 1494-1570), ки бо тахаллусҳои Noviomagus ва Neomagus машҳур аст, якчанд китоб оид ба арифметика нашр кард, ки дар китоби дуюми соли 1544 баромада ва баъдан соли 1901 аз сари нав нашршуда, ақидаи Ибн ал-Банни ҷадвали ададҳои натуралиро оид ба тақсимкунандаҳои адад тартиб дод [140, с. 253-267]. Вақте ки адади $p$ ҳамчун адади сода мебошад, ададҳои $\mathrm{p}^2, \mathrm{p}(\mathrm{p}+2), \mathrm{p}(\mathrm{p}+4), \cdots$ дар ҷадвал хат зада мешавад. Бинобар он, хулоса мебарояд, ки адади таркибии ба k тақсимкунандаи сода каратӣ дар ҷадвал дар k сутун ҷой мегирад.

Ҳамин тавр, дар охири асри XVII андеша оид ба татбиқшавии ғалбер ва дар шакли прогрессия ифода намудани он суръати тоза гирифт. Дар муқоиса дидан мумкин аст, ки агар Эратосфен ададҳои содаро ҳамчун прогрессия бо ададҳои воҳид таҳлил карда бошад, Никомах прогрессияро бо фарқи ду таҳқиқ ва Лейбнис қатори ададҳои содаро ҳамчун прогрессия бо фарқи шаш пешниҳод намуд.

Ҷадвали Л. Эйлерро (с. 50) аксар муаллифон истифода намуданд, ки ин усул аҳамияти амалӣ дорад. Худи Л. Эйлер масъала гузошта буд, ки ба воситаи ин ҷадвал миқдори ададҳои байни ҳам сода ва хурдтарини онро муайян месозем. Баъдтар ин ҳолатро К.Ф. Гаусс функсияи Эйлер номида, бо φ(m) ишора кардааст [145, с. 30-31].

Масъалаи мазкурро Л. Эйлер ва К.Ф. Гаусс бо ёрии ҷудокунии адади додашуда ба зарбкунандаи одӣ ҳал намуданд, ки чунин аст: аз системаи ададҳои $1, 2, 3, \cdots, m$ (ки дар ин ҷо $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_R^{a_R}$ мебошад) зарбкунандаҳои одиро ҷудо карданд. Адади m-ро бо $\mathrm{p}_1$ пайдарпай тақсим намуда, каратии $\mathrm{p}_1$, баъд каратии $\mathrm{p}_2$, каратии $\mathrm{p}_\mathrm{k}$ ва ғайраҳоро ҳисоб намуданд.

Дар байни ададҳои $1, 2, 3, \cdots$ , m миқдори ададҳои ба $\mathrm{p}_1$ каратӣ ба $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}_1}$ баробар буда, адади ба $\mathrm{p}_1$ тақсимшаванда ба $\mathrm{m} - \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}_1} = \mathrm{m}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{p}_1}\right)$ баробар аст.

Дар қадамҳои оянда аз боқимондааш

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}_1}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{p}_1}\right)$$

ҳосил карда мешавад. Адади ба $\mathrm{p}_1$ ва $\mathrm{p}_2$ тақсимшаванда ба

$$m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)$$

ва то охирон қадам

$$\varphi(m)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_R}\right)$$

ҳосил мегардад.

Ғалбери Л. Эйлер асос гардид, ки барои таҳқиқи тақсимоти ададҳои сода дар намуди прогрессия роҳҳои ҷустуҷӯи илмӣ оғоз ёбад. Дар нақши аввал, ин исботи ҷойгиркунии ададҳои сода то беохирӣ дар намуди прогрессияҳои mk+ r, $0 < r < m$, КТУ (m, r)=1 буд. Исботи ин тақсимоти ададҳои сода соли 1837 дар корҳои илмии Л. Дирихле (1805-1859) бо усулҳои махсуси «ғайриэлементарӣ» мушоҳида мешавад, ки ба он функсияи махсуси L-функсия дохил карда шуд [142, с.45-71].

Паҳнкунии принсипи Эратосфен барои муайян намудани ададҳои сода ба шакли прогрессияҳо дар таҳқиқоти математики фаронсавӣ В.А. Лебег (солҳои 1791-1875) [151, с.1-37], ки бо воситаи прогрессияҳо бо фарқи прогрессияи калон ёфтани ададҳои содаро таҳқиқ намуд, ба назар мерасад. Ӯ прогрессияро бо фарқи прогрессияи баробари $210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7$ таҳқиқ намуд. Прогрессияи Лебег дар шакли 210k+ r, барои r-ҳои ғайри адади 2, 3, 5, 7-ро дар бар мегирад. Маълум аст, ки $\varphi(210) = 48$, прогрессияи ҳамаи ададҳои содаро ба ғайр аз 2, 3, 5, 7-ро фаро мегирад. Аз тарафи дигар, таҳқиқот нишон медиҳад, ки чунин усули прогрессия бо фарқи прогрессии калон барои ҳисобкунӣ буда, барои инкишофи назариявии сохтани прогрессияҳо аҳамияти калон дорад. Баъдтар маълум шуд, ки бо фарқи прогрессияи калон истифодаи прогресияи арифметикӣ оид ба ҷудокунии ададҳои сода характери ҳисобкуниро дорад.

Ҳамин тариқ, татқиқоти аввалаи шаклтағйирдиҳии «Ғалбери Эратосфен» ба ҷудокунии ададҳои сода бо ёрии прогрессияҳо маҳдуд шудааст. Дар давраҳои минбаъда масъалаҳои ҷудокунӣ дар арифметика роҳи ҳалли худро ёфтанд. «Дар ин самт таҳқиқоти олими руси асри XIX профессори донишгоҳи Москва, яке аз ташкилкунандаҳои ҷамъияти математикон - астроном, механик ва риёзидон А. Слудский (солҳои 1841-1897) мебошад, ки ӯ фаъолона барои инкишофи назарияи ададҳо кӯшиш намуд ва ақидаи «Ғалбери Эратосфен»–ро бо имкониятҳои гуногун пешниҳод намуд» [113, с. 195-208]. «Соли 1868 дар машварати ҷамъияти математикон оид ба ададҳои сода ва шакли он маърӯза намуда, нишон дод, ки он аз ду қисм иборат аст. Қисми якум, истифодаи формулаи Лежандр оид ба муайян намудани миқдори ададҳои сода дар қатори $1, 2, 3, \cdots, x$ бо шакли

$$\pi(x) = \pi(\sqrt{x}) - 1 + [x] - \sum_{1\le i\le n} \left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{1\le i<j\le n} \left[\frac{x}{p_i p_j}\right] - \cdots$$

мебошад, ки дар ин ҷо $p_1 < p_2 < \cdots < p_n \le \sqrt{x}$, $[a]$ – қисми бутуни адади $a$ буда, $p_1,\ p_2, \cdots, p_n$ –ададҳои сода мебошад» [114, с. 214-216].

Қисми дуюм, ин муайян намудани ададҳои сода дар байни ададҳои $\sqrt{x}$ ва $x$ мебошад.

Бигузор $p_1,\ p_2, \cdots, p_n$ – ҳамаи ададҳои сода дар байни қатори $1, 2, 3, \cdots, \sqrt{x}$ буда, $\sqrt{x} < y \le x$, адади $y$ адади сода мебошад, агар ҳангоми онро бо $p_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ тақсим намудан бақияҳои $1, 2, 3, \cdots, p_i - 1$ ҳосил шавад. Ин масъала дар шароити ҳозира дар намуди зерин навишта мешавад:

$$\begin{cases} y \equiv [u]_1^{p_1-1} (\mathrm{mod}\ p_1), \\ y \equiv [u]_1^{p_2-1} (\mathrm{mod}\ p_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y \equiv [u]_1^{p_n-1} (\mathrm{mod}\ p_n), \end{cases}$$

ки дар ин ҷо $[a]_1^{p_1-1}$ – аз ададҳои $1, 2, 3, \cdots, p - 1$ калон мебошад.

Ин намуди масъалаҳо теоремаи ҳисоб дар бораи ёфтани бақияҳо мебошад, ки дар асрҳои III ва IV дар музофоти Син-Сзю пайдо шуда, ҳалли он ба математики чинӣ Син Сзю Шао [135, с. 79] дар асри XIII тааллуқ дорад.

Аз усули Син Сзю Шао истифода намуда Ф.А. Слудский ҳалли масъалаҳоро дар шакли зерин ҷустуҷӯ мекунад:

$$y \equiv \left(\frac{p}{p_1}\right)^{p_1-1}[u]_1^{\;p_1-1} + \left(\frac{p}{p_2}\right)^{p_2-1}[\upsilon]_1^{\;p_2-1} + \cdots + \left(\frac{p}{p_n}\right)^{p_n-1}[\omega]_1^{\;p_n-1} (\mathrm{mod}\ p),$$

ки дар ин ҷо $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$ мебошад.

Масалан, агар муайянкунии ададҳои сода байни адади 4 ва адади 16 бошад, он гоҳ $p = 2 \cdot 3 = 6$ буда, барои ҳалли масъала системаи зеринро ҳал намудан лозим аст:

$$\begin{cases} x \equiv [u]_1^1 (\mathrm{mod}\ 2) \\ x \equiv [\upsilon]_1^2 (\mathrm{mod}\ 3). \end{cases}$$

Дар ин ҷо $[u_1]_1^1 = 1, [\upsilon]_1^2$ пайдарпай ба 1 ва 2 баробар аст, бинобар он,

$$x \equiv \left(\frac{6}{2}\right)[u_1]^1 + \left(\frac{6}{3}\right)^3 [\upsilon_1]_1^{\;2} \equiv 3 + 4[\upsilon]_1^2 (\mathrm{mod}\ 6),$$

ва аз ин ҷо

$$x \equiv 3 + 4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 6), \qquad x \equiv 1 + 6t,$$

$$x \equiv 3 + 8 \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 6), \qquad x \equiv 5 + 6t.$$

Интихоби қиматҳои t, имконият медиҳад, ки ададҳои сода дар байни 4 ва 16-ро муайян намоем, қиматҳои $x$ ададҳои 7, 13 ва 5, 11 пайдо мешавад.

Ин усули Ф.А. Слудский ба инкишофи муайянкунии ададҳои сода бо ёрии пешакӣ интихоб намудани якчанд адади содаи аввал имконият дод. Ин усул имконият дод, ки аз пешакӣ донистани ададҳои содаи аз $a$ калон набуда ва ба воситаи формула ёфтани ададҳои сода дар байни ададҳои $a$ ва $a^2$ мусоидат намуд. Дар корҳои илмии муаллифони минбаъда, масалан: «П.С. Поретский ин усул ҳамчун усули умумикардашудаи зиёд намудани фарқи прогрессияи арифметикӣ дониста шуд» [76, с. 52-140].

Г.В. Лейбнитс (солҳои 1646-1716) пешниҳод кард, ки ҳамаи ададҳои содаро ба ғайр аз 2 ва 3 дар прогрессияҳои $6k + 1$ ва $6k + 5$ дидан мумкин аст [76, с. 52-140]. Аммо ӯ кӯшиш накард, ки қисми зиёди корҳои худро нашр кунад, аз ин рӯ, масъалаи ифодаи ададҳои сода дар шакли прогрессияи дар боло овардашуда то имрӯз пурра нагаштааст. Татбиқшавии ғалбер нисбат ба ин прогрессияҳо соли 1887 аз тарафи математики шаҳри Қазон (Россияи подшоҳӣ) П.С. Порецкий (солҳои 1846-1907) амалӣ карда шудааст.

«Ҳолати дигари шаклдигаркунии «Ғалбери Эратосфен» дар корҳои таҳқиқотии хатмкардаи донишгоҳи шаҳри Киев, муҳаррири маҷаллаи «Вестник опытной физики и элементарной физики» Э.К. Шпачинский (солҳои 1848-1912) муқаррар шуд. Соли 1888 дар маҷаллаи дар боло номбаршуда ӯ ба монанди Слудский роҳҳои ҷудокунии ададҳои содаро дар дилхоҳ фосилаи ададии ададҳои тоқ нишон дод. Адади тоқи $n = 2a + 1$ барои ҳамаи ададҳои содаи $\mathrm{p} \leq \sqrt{\mathrm{n}}$ адади сода мебошад, агар

$$\mathrm{a} \not\equiv \frac{\mathrm{p}-1}{2} (\mathrm{mod}\ \mathrm{p})$$

бошад. Ба таври дигар, агар $\mathrm{n}$ – адади сода бошад, он гоҳ барои $n = a + (a+1)$ адади $a$ бояд ягон муодилаи муқоисакунии зеринро қаноат накунад:

$$x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$$
$$x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x \equiv \frac{\mathrm{p}-1}{2} (\mathrm{mod}\ \mathrm{p}),$$

$\mathrm{p} \leq \sqrt{\mathrm{n}}$ бошад. Ин муқоисакунии меъёри Э.К. Шпачинский ном гирифт. Гузориши ин гуна усул барои муайян намудани ададҳои содаи аз $N$ то $M$ бо муайян намудани чунин адади

$$\mathrm{N}_1 = (a + x) + (a + x + 1),$$

ки $a + x$ бояд системаи меъёрии муқоисакуниро қаноат накунад, зарур аст» [132, с. 107 – 110].

Акнун ададҳои содаро то адади 300 муайян мекунем. Охирин адади содаи то 200 адади 199 мебошад,

$$\mathrm{N}_1 = 199 = 99 + 100,$$

он гоҳ муқоисакунии меъёрӣ то $\sqrt{300} \approx 17$ муодилаҳои

$$x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3),$$
$$x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5),$$
$$x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 7),$$
$$x \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 11),$$
$$x \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 13),$$
$$x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17)$$

мебошанд.

Ҳангоми ба адади 99 тақсимкунии муодилаҳои додашуда бақияҳои 0, 4, 1, 0, 8, 14 пайдо мешаванд. Муодилаҳои меъёрии муқоисакунӣ дар шакли прогрессия намуди зеринро мегиранд:

$$x = 1 + 3\mathrm{t},$$
$$x + 4 = 2 + 5\mathrm{t},$$
$$x + 1 = 3 + 7\mathrm{t},$$
$$x = 5 + 11\mathrm{t},$$
$$x + 8 = 6 + 13\mathrm{t},$$
$$x + 14 = 8 + 17\mathrm{t},$$

ки дар ин ҷо ҳамаи қиматҳои аз 1 то 50 ба эътибор гирифта нашуда, қиматҳои имконпазири $x$ дар формула

$$\mathrm{N}_1 = (99 + x) + (100 + x) = 199 + 2x$$

ададҳои 6, 12, 14, 15, 17, 20, 21, 26, 29, 32, 35, 36, 39, 40, 41, 42, 47 ҳосил мешавад. Бинобар ин, ададҳои сода дар байни ададҳои аз 200 то 300 инҳо мебошанд:

211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 281, 283, 293.

Э.К. Шипачинский ин усулро ба пайдарпаии камшаванда татбиқ намуд, яъне аз $\mathrm{N} = \mathrm{a} + (\mathrm{a} + 1)$, $\mathrm{N}$ –адади сода, ҳамаи қимати $x$ –ро ҷудо менамояд, ки $\mathrm{N}' = (\mathrm{a} - x) + (\mathrm{a} - x + 1)$ низ адади сода мебошад.

Академики академияи илмҳои Петербург В.Я. Буняковский (солҳои 1801-1889) шаклтағйирдиҳии «Ғалбери Эратосфен»–ро ба намуди прогрессияи арифметикӣ бо фарқи прогрессияи ба 10 баробар татбиқ намуд [13]. Моҳияти кори В.Я. Буняковский ба ҳалли муодилаҳои бутуни дуномаълумаи миқдори муодилаҳои номаълум оварда расонд. Мавқеи асосӣ дар пешниҳоди В.Я. Буняковский ин ёфтани хурдтарин тақсимкунандаи сода барои адади калон мебошад. Ғалбери В.Я. Буняковский онро дар 5 мисол нишон медиҳад.

1) *Муайян намудани ададҳои содае, ки рақами охиринашон бо 1 тамом мешаванд ва дар фосилаи аз 100 то 200 мехобанд*. В.Я. Буняковский барои ин гуна ададҳо ишораи $1\,x\,1-$ро дохил намуд, ки $x-$ пайдарпаӣ қиматҳои 0, 1, 2, 3, ..., 9-ро қабул менамояд. Азбаски ифодаи

$$1 \cdot 1 = 100 + 10 \cdot x + 1 = 101 + 10 \cdot x,$$

ҳангоми ёфтани ададҳои сода дар прогрессияи $101 + 10x$ баробари

$$0 \leq x \leq 9$$

буда, ададҳои таркибӣ бо муодилаи зерин $py - 10x = 101, p-$дилхоҳ адади содаи $\left|\sqrt{9}\right|$ мебошад, муайян карда мешаванд.

Дар ин мисол усули ҷудокунии ададҳои содаи В.Я. Буняковский барои ададҳои хурд буда, ӯ онро ба ҷудокунии ададҳои калон истифода бурд. Моҳияти ин усул аз он иборат аст, ки пешакӣ аз муодилаи

$$\text{py} - 10x = 101 \qquad (1)$$

қимати хурдтарини $\text{x}_0$, ки ба $\text{y}_0$ мувофиқ меояд, муодилаи дар боло нишондодашуда дар шакли $x = 101x_0 - pz$

$$\text{ё } z = \frac{101x_0 - x}{\text{p}}, \qquad (2)$$

ифода ёфта, дар ин ҷо $\text{z}-$ адади бутун буда нобаробарии зеринро қаноат мекунад:

$$\frac{101x_0 - 9}{\text{p}} \leq \text{z} \leq \frac{101x_0}{\text{p}}.$$

Ҳангоми $p = 3$ будани нобаробарии боло чунин ифода шуда,

$$\frac{101x_0 - 9}{3} \leq \frac{101x_0}{3}$$

қимати $x_0$ аз муодилаи $3\text{y} - 10x = 1$ ҳосил мешавад.

Ҳангоми $x_0 = 2$ будан қимати $z$ аз нобаробарии

$$64\frac{1}{3} \leq \text{z} \leq 67\frac{1}{3}$$

ҳосил гардида, қиматҳои бутуни $z$ ададҳои 65, 66, 67 буда, қиматҳои $x$ дар асоси муодилаи (2) $x = 1, 4, 7$ ё ададҳои таркибии 111, 141, 171 мувофиқ мегардад.

Ҳамин тариқ, ҳангоми p барои 7, 11, 13 ададҳои таркибии 111, 121, 141, 161, 171 муайян гардида, ададҳои содаи серақамаи 101, 131, 151, 181, 191 пайдо мешаванд [133, с. 14-15].

2) *Муайян намудани ададҳои сода дар фосилаи аз 1000 то 2000 ва истифодаи он дар фосилаи аз 1000 то 10000. Фосилаи ададҳо аз 1000 то 2000 ба чор гурӯҳ ҷудо карда мешавад*. Гурӯҳи якум ҳамаи ададҳои ба 1 тақсимшавандаи аз 1001 то 1991, гурӯҳи дуюм ҳамаи ададҳои ба 3 тақсимшавандаи аз 1003 то 1993, гурӯҳи сеюм ададҳои ба 7 тақсимшавандаи аз 1007 то 1997, гурӯҳи чорум ададҳои ба 9 тақсимшавандаи аз 1009 то 1999 дар бар мегиранд. Ададҳои ба 5 тақсимшаванда дида намешаванд, зеро байни ададҳои ба 5 тақсимшаванда ададҳои сода мавҷуд нест. Ҳамин тавр, масъала ба ҳалли муодилаҳои зерин оварда мешавад:

$$\mathrm{py} - 10x = 1001,$$
$$\mathrm{py} - 10x = 1003,$$
$$\mathrm{py} - 10x = 1007,$$
$$\mathrm{py} - 10x = 1009,$$

ки қиматҳои $x$ ададҳои дурақамаи 00, 01, 02, ⋯, 99 буда, адади содаи p −қиматҳои 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 қабул мекунад ва қимати $\sqrt{2000} = 44{,}6$ мебошад.

3) *Муайян намудани ададҳои содаи серақама бо ёрии суммаи рақамҳое, ки адади доимӣ мебошанд*. Дар мисоли В.Я. Буняковский суммаи рақамҳо бо 16 баробар аст. Адади охирини серақама 961 буда, 9+6+1=16 ва $\sqrt{961} = 31$ аст. Дар байни ҳамаи ададҳои серақама ададҳои ба 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ва 31 каратиро ҷудо мекунем. Ин адад ҳангоми шарти $\mathrm{u} + \mathrm{v} + \mathrm{w} = 16$ шакли зеринро мегирад:

$$\mathrm{N} = 100\mathrm{u} + 10\mathrm{v} + 20.$$

Ададҳои таркибии аз муодилаи

$$py - 90u = 160 - 9w$$

муайяншуда, қимати p ҳамаи қиматҳои 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ва 31-ро қабул мекунад.

4) *Муайян намудани ададҳои сода дар системаи «Намуди баргарданда»* ин системаҳои ададии якхела ҷойгиршуда мебошад. Масалан, $16x16$, ки қимати $x$ ба 0, 1, 2, ⋯, 9 баробар аст, намуди ин адади панҷрақама

$$N = 10^4u + 10^3v + 10^2w + 10v + u$$

буда, он ба шакли $N = 101(101u + 10v) + 100(w - 2u)$ оварда мешавад. Ададҳои шакли $16x16$ намуди

$$N = 101(101 \cdot 1 + 10 \cdot 6) + 100(x - 2) = 16261 + 100(x - 2)$$

доранд. Азбаски $16261 = 7 \cdot 23 \cdot 101$ буда, адади $N$ ҳангоми $100(x - 2)$ ба ададҳои 7, 23, 101 каратӣ будан, адади таркибӣ мебошад. Адади $x$ қиматҳои 0, 1, 2, ⋯, 9 қабул мекунад, $x - 2$ ҳангоми $x = 9$ будан ба 7 каратӣ мебошад. Ҳамин тавр, мебинем, ки ададҳои 16261 ва 16361 ададҳои таркибӣ мебошанд. Аз рӯи аломатҳои тақсимшавӣ ба 11 ва 13 муайян намудан мумкин аст, ки адади 16861 ба 13 каратӣ мебошад.

Барои ададҳои боқимонда тақсимшаӣ ба 17, 19,29, 41, 47, 53, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 97, 103, 107, 109, 113 ва 127-ро дидан мумкин аст ва

$$\sqrt{16961} \approx 127$$

мебошад.

$$N = 16261 + 10(x - 2) = 7 \cdot 23 \cdot 101 + 2^2 \cdot 5^2 \cdot (x - 2)$$

мешавад ва шарт нест, ки тақсимшавии адади $N$ –ро ба 3, 7, 11, 13, 23, 31, 37, 59, 101 санҷем [133, с. 16].

5) *Гузориши усули коркарди ёфтани ададҳои сода.* Бигузор масъалаи муайян намудани адади алоҳидаи сода ё таркибӣ будани он гузошта шавад. Масалан, адади $N = 4567$ – ро, В.Я. Буняковский чунин гузориш мекунад. Онро ба намуди $45 \cdot 7$ навишта муайян менамояд, ки

4507-адади сода,

4517-адади сода,

$$4537 = 13 \cdot 349$$

4547-адади сода,

4567-адади сода,

$$4577 = 23 \cdot 199$$

4597-адади сода.

Дар ин система ададҳои 4557, 4587, бинобар ба 3 каратӣ будан, хориҷ шудаанд. Бартарӣ доштани усули пешниҳодкардаи В.Я. Буняковский нисбат ба «Ғалбери Эратосфен»—ро чунин шарҳ медиҳад, ки ҳангоми ҷудокунии ададҳои сода дар фосилаи 1001 то 1991 бо ғалбери Эратосфен амали тақсимро 374 маротиба иҷро намудан лозим аст. Бо усули пешниҳодгардидаи В.Я. Буняковский 36 муодиларо ҳал намудан зарур аст.

Усули В. Я. Буняковский ба масъалаи муайянкунии $\pi(x+y)-\pi(x)$ барои қиматҳои калони $y$ бо нишондодҳои амалии муайянкунии ададҳои сода мебошад.

Усули В.Я. Буняковский имконият дод, ки дар Россия корҳои илмии васеъ ва дар хориҷа мақолаҳои илмӣ оид ба ҷудокунии ададҳои сода пайдо шаванд: «Астроном-мушоҳидачӣ, иҷрокунандаи вазифи дотсенти донишгоҳи Қазон, доктори фанни астрономия П.С. Поретский (солҳои 1846-1907) дар соли хониши 1886/1887 дар семинар-машварати илмҳои физика ва математика дар мавзуи «Омӯзиши ададҳои сода» баромад намуд. Баромади илмии ӯ ба асоснокунии назариявӣ ва умумигардонии шаклтағйирдиҳии «Ғалбери Эратосфен» бахшида шуда буд» [76, с. 52-140]. Ба ғайр аз ин, муайянкунии масъалаҳои назариявӣ ва амалии назарияи ададҳо гузошта шуда буд. Мақсад аз гузориши «Ғалбери Эратосфен» барои муайянкунии ададҳои сода дар фосилаи муайян (аз 1 то N) барои ёфтани ҳамаи ададҳои сода ба ғайр аз якчанд ададҳои содаи аввали $p_1 p_2 \cdots p_n$ иборат буд. Бинобар ин, масъалаи асосӣ ин ёфтани ададҳои сода дар прогрессияҳои намуди дилхоҳ

$$\mathrm{mk+r}, \qquad \mathrm{(m,r)=1}$$

гузошта шуда буд.

Бо ибораи дигар, муайянкунии ададҳои сода аз *1* то $N$, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots, p_n$ $\left(p_n \leq \sqrt{N}\right)$ ин якҷоякунии ҳамаи ададҳои содаи то $N$, ки аз прогрессияи

$$\psi(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot \mathrm{p_n}) + \mathrm{k}\, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot \mathrm{p_n}.$$

ҳосил мешаванд, буд. Функсияи $\psi(\mathrm{m})$ – функсияи умумикардашудаи Л. Эйлер $\psi(\mathrm{m})$ буда, ҳамаи ададҳои байни ҳам сода бо m ифода меёбанд.

Аввалин татбиқи эвристикӣ оид ба қимати функсияи $\psi(\mathrm{m})$, ки аз ҳосили зарби якчанд ададҳои содаи аввала иборат аст, оварда шудааст. Дар асосноккунии формулаҳо барои ин функсия ҳангоми m, ки ба ҳосили зарби якчанд ададҳои содаи аввала баробар аст, пешниҳод шудааст. Аз тарафи дигар, формулаҳои мушоҳидашуда ба қиматҳои гуногуни ин функсия хеле мураккаб буда, татбиқи амалии он номумкин аст. Бинобар ин, П.С. Поретский формулаи функсияи $\psi(\mathrm{m})$ –ро чунин ифода намудааст [76]:

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} = \prod(\mathrm{p}) \cdot \mathrm{A},$$

$$\prod(p) = p_1 p_2 \cdots p_n, \qquad A = p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} \cdots p_n^{a_n-1},$$

$$\psi(\mathrm{m}) = \psi\left(\prod(\mathrm{p})\right) + \mathrm{k} \prod(\mathrm{p}).$$

Дар баробарии охирон қиматҳои $k$ пайдарпай қиматҳои 0, 1, 2, ⋯, $\mathrm{A} - 1$ –ро қабул мекунад. Дар ҳолати хусусӣ:

а) ҳангоми $\mathrm{m = p}, \psi(\mathrm{p}) = 1, 2, \cdots, \mathrm{p} - 1$,

б) ҳангоми $\mathrm{m} = \prod(\mathrm{p})\,, \psi(\prod(\mathrm{p})) = \prod(\mathrm{p}) \sum_{1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}} \frac{\psi(\mathrm{p_i})}{\mathrm{p_i}} - \mathrm{k'} \prod(\mathrm{p})$ мебошад.

Дар ин ҷо $\mathrm{k'}$ қиматҳоеро қабул мекунанд, ки фарқи қисми рост байни 0 ва $\prod(\mathrm{p})$ буда, имконияти ин ададҳо бояд ба

$$\varphi\left(\prod(\mathrm{p})\right) = (\mathrm{p_1} - 1)(\mathrm{p_2} - 1) \cdots (\mathrm{p_n} - 1) = \prod(\mathrm{p} - 1)$$

баробар бошанд.

Масалан, барои ёфтани қимати функсияи $\psi(72)$ ба назар мегирем, ки дар функсияи Эйлер $\psi(72)=24$ мебошад. Дар ин ҷо

$$A = 2^2 \cdot 3 = 12, \qquad \prod(p) = \frac{72}{12} = 6.$$

Бинобар ин, $\psi(72) = \psi(6) + 6k, (k = 0, 1, 2, \cdots, 11)$,

$$\psi(6) = 6\left(\frac{\psi(2)}{2} + \frac{\psi(3)}{3} - k\right) = 3 + 2\psi(3) - 6k,$$

$\psi(2) = 1,\ \ \psi(3) = 1;\ \ 2$. Азбаски $\psi(6) = 5; 1$, мебошад, пас $\psi(72)$ қиматҳои зеринро қабул карда метавонад:

5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 65, 71 ва

1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, 67.

Функсияи $\psi(m)$ барои қимати хусусии m ба шакли прогрессия меорад, ки дар шаклдигаркунии усули ғалбери Эратосфен омӯхта шуда буд.

Ҳангоми

а) $\prod(p) = 2, \psi(\prod(p)) = 1,$ то $\psi(\prod(p)) + k\prod(p) = 1 + 2k$

будан, Никомах онро барои ҳосилкунии ададҳои сода ба ғайр аз 2 истифода намуд;

б) Дар мавриди $\prod(p) = 2 \cdot 3, \qquad \psi\left(\prod(p)\right) = 1; 5,$ будан

$$\psi\left(\prod(p)\right) + k\prod(p) = \begin{cases} 1 + 6k, \\ 5 + 6k, \end{cases}$$

мешавад, ки ба туфайли ин тасдиқот Лейбнитс нишон дод, ки ин прогрессия ҳамаи ададҳои содаро ба ғайр аз 2 ва 3 дар бар мегирад;

в) ҳангоми $\prod(p) = 2 \cdot 5,\ \ \psi(\prod(p)) = 1, 3, 7, 9$ будан $\psi(\prod(p)) + k\prod(p)$ чор прогрессияи $1 + 10k, 3 + 10k, 7 + 10k$ ва $9 + 10k$ –ро ифода мекунад, ки дар ин прогрессияҳо В.Я. Буняковский ҳамаи ададҳои содаро ба ғайр аз 2 ва 5 муайян карда буд;

г) вақте, ки $\prod(p) = 2 \cdot 3 \cdot 5$ аст, он гоҳ аз формулаи $\psi(\prod(p)) + k \cdot \prod(p)$ ҳашт прогрессия пайдо мешавад, ки онҳоро Л. Эйлер муайян карда буд. Ин прогрессияҳо $1 + 30k, 7 + 30k, 11 + 30k, 13 + 30k, 17 + 30k, 19 +$

$30k, 23 + 30k$ ва $29 + 30k$ буда, ҳамаи ададҳои сода ба ғайр аз 2, 3 ва 5 муайян карда мешаванд [133, с. 19].

Назарияи умумии ҳалли масъалаи ёфтани ададҳои сода дар прогрессияи $\psi(\prod(p)) + k \cdot \prod(p)$ хеле одӣ мебошад. Бигузор масъалаи ёфтани ададҳои сода дар байни ададҳои M то N додашуда бошад, ки ($M > N$) аст. Бигзор $p_1 < p_2 < \cdots < p_n \leq \sqrt{N}$ бошад. П.С. Порецкий барои ҳосили зарби $2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot p_n$ ишораи $\pi(p_n)$ дохил намуд. Дар формулаи $\psi(\prod(p)) + k\prod(p)$, $\prod(p) = \pi(p_n)$ ва бо дарназардошти $p_n > 3, \pi(p_n) > p_n^2$, ё $\pi(p_n) > N$ ҳамаи ададҳои $\psi(\pi(p_n))$, ки аз $M$ калон ва аз $N$ хурд мебошанд, ёфта мешаванд. Масалан, ададҳои содаро дар фосилаи аз 1 то 100 меёбем. Азбаски $\sqrt{100} = 10$ аст, он гоҳ $p_n = 7, \pi(p_n) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210, \psi(\pi(p_n))$ дар дохилаш $\psi(210) = 48$ дорад, қиматҳои байни ҳам содаи 210 то ададҳои аз 100 зиёд набуда, ҳангоми ҳамроҳкунии 2, 3, 5 ва 7-ро ҳосил мекунем, ки

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,$$
$$43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

мебошанд. Ин усул имконият медиҳад, ки он барои дар чорчӯбаи муайян ҳал намудани масъала истифода бурда шавад, аммо дар амалия истифодаи он ба мушкилиҳои зиёд оварда мерасонад. Усули пешниҳодшуда имконият медиҳад, ки формулаи $\psi(\prod(p)) + k\pi(p)$ на барои ҷудокунии ҳамаи ададҳои содаи *2, 3, 5,* $\cdots, p_n \leq \sqrt{N}$ балки танҳо барои ҳолатҳои алоҳида бо комбинатсияҳои алоҳида истифода бурда шавад. Барои мисол ададҳои содаро дар байни ададҳои

$$M, M + 1, M + 2, \cdots, N - 1, N$$

ҷустуҷӯ мекунем. Дар ҳамаи амалиётҳо ҷудокунии ададҳои сода бо нишондоди П.С. Порецкий бо ду усули операционӣ аз ҳамдигар фарқ мекунанд. Якум, ҳангоми ивазкунӣ бо ёрии қимати интихобшудаи $\prod(p)$ аз қатори ададҳои байни M ва N бо аъзоҳои $\psi(\prod(p)) + k\prod(p)$ мебошад. Дуюм, аз ин қатор ададҳои боқимондаро хориҷ намудан мебошад.

Амалиёти якумро П.С. Поретский [76] ғалберкунонии пешакӣ номида, амалиёти дуюмро амалиёти охирон ҳисоб мекунад. Маълум аст, ки дар пайдарпаии ададҳои натуралӣ якчанд варианти пешакӣ ғалбер намудан мавҷуд аст.

Ғалберкунии пешакӣ дар ҳолате, ки $\prod(p)$ аз ҳосили зарби l ададҳои сода иборат аст:

$$\prod(p) = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_l$$

пешакӣ ғалберкунонии разряди l меноманд. П.С. Поретский исбот менамояд, ки ҳама гуна ғалберкунонии разряди якум, ин ғалберкунонӣ бо якҷоякунонии ададҳо дар пайдарпаии ададҳои тоқ мебошад. Одитарин ғалберкунонии разряди дуюм ин ғалбери Лейбнитс, ғалберкунонии разряди сеюм ин ғалбери Эйлер ва ғалберкунонии разряди чорум ин ғалбери Лебег мебошад.

Дар ҳолати умумикардашуда, вақте ки $\prod(p) = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_l$ мебошад, $l > 4$ –ро интихоб намуда, дар пайдарпаии ададҳои сода $\mathrm{p}_1 < \mathrm{p}_2 < \cdots < \mathrm{p}_\mathrm{n} \leq \sqrt{\mathrm{N}}$, ғалбери пешакӣ ташкилшудаи разряди l – ро истифода намудан мумкин аст. Бо ёрии ин ададҳо ҳамаи адаҳои таркибии дар байни M ва N-бударо хориҷ намудан мумкин аст. Миқдори ин ададҳо ба

$$\varphi\left(\prod(\mathrm{p})\right) = \prod(\mathrm{p} - 1) \text{ баробар аст.}$$

Бигузор, ҳамаи ин ададҳо бо тартиби афзуншавӣ ҷойгир шуда пайдарпаии $a_1, a_2, \cdots, a_s$ – ро ташкил намояд, ки дар ин ҷо

$$s = \prod(p-1)\ a_1 = 1,\ a_s = \prod(p) - 1.$$

Бигзор, $M = \prod(p) \cdot h + \beta,\ 0 \leq \beta < \prod(p)$ ва $a_{i-1} < \beta \leq a_i,$ он гоҳ $\prod(p) \cdot h + a_1$ адади ҳурдтарини намуди $\varphi(\prod(\mathrm{p})) + \mathrm{k}\prod(\mathrm{p})$ – ро ифода намояд. Ба адади $\prod(p) \cdot h$ ҳамроҳкунии ададҳои $a_{i+1}, \cdots, a_s$ ба ҳосилшавии ададҳои дигар оварда мерасонад. Ададҳои боқимонда бо ёрии ифодаҳои $(h+1)\prod(p)$, $(h+2)\prod(p)$, $\cdots$ бо ҳамроҳкунии адади $a$ пайдо мешавад. Ин ҷараёни ҳисобкунӣ то вақте давом мекунад, ки ададҳои пайдошуда аз адади $N$ зиёд нашаванд. Акнун инро дар мисоли мушаххас дар байни ададҳои $M=101$ ва $N=200$ дида мебароем. Ҳамаи ададҳои байни ҳам содаро бо $\prod(p) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ муайян мекунем. Қайд мекунем, ки $\psi(30)$ 8-то қимат дорад: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ва 29. Азбаски $101 = 30 \cdot 3 + 11$ мебошад, бинобар ин, $\beta = 11, h = 3$ мебошад. Ба $\prod(\text{р})\, h = 30 \cdot 3 = 90$ пайдарпай ададҳои 13, 17, 19, 23 ва 29-ро илова менамоем. Баъд аз он ба адади $h = 3$ аввал 1, баъд 2 ва ҳоказоро бо дарназардошти қимати $\psi(30)$ илова мекунем, ададҳои ҳосилшуда аз 200 хурд мебошанд. Ҳамин тавр, ҳамаи ададҳои дар байни 101 ва 200 мавҷудбуда ададҳои зерин мебошанд:

101, 131, 161, 191,
103, 133, 163, 193,
107, 137, 167, 197,
109, 139, 169, 199,
113, 143, 173,
119, 149, 179,
121, 151, 181,
127, 157, 187.

Аз қатори ҳосилшуда ададҳои ба 7, 11, 13 каратиро хориҷ намуда, ададҳои содаи зеринро ҳосил мекунем: 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

Маълум мегардад, миқдори ададҳои сода дар байни 101 то 200 ҳамагӣ 21-то мебошад.

П.С. Порецкий [76] ҷиҳати амалии гузаштан аз ғалберкунии пешакӣ то ғалбери охиронро дида баромада аст. Тибқи нишондоди ӯ бигузор ғалберкунии аввал аз M то N ва пайдарпаии пешакӣ гирифташуда $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_l$ аз пайдарпаии $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$ барои ташкили $\prod(\text{р})$ ададҳои $\text{А}_1, \text{А}_2, \cdots, \text{А}_\lambda$ бошад. Дар ин пайдарпаӣ ададҳои каратӣ ба ададҳои содаи $q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots$ мавҷуд аст, ки онҳо хориҷ карда мешаванд. Бигузор $\text{А} -$ ба $\prod(\text{р})$ каратӣ ва хориҷшавандаи навбатӣ бошад. Дар навбати дигар, адади $\text{А} + x$, ки $x$ қимати $\lambda$ бо $\prod(\text{р})$ байни ҳам сода ва, ҳар як $a_1, a_2, \cdots, a_s$ бо модули

$\prod(\mathrm{p})$ муқоисшаванда бошанд. Ҳангоми интихоби $\mathrm{A}_1 < \mathrm{A} < \mathrm{A}_\lambda$ қимати $x$ дар байни $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}$ ва $\mathrm{A}_\lambda - \mathrm{A}$ буда, қимати q аз дилхоҳ адади $q_1, q_2, \cdots, q_n -$ буда $\mathrm{A} = qr + \beta$ ҳосил мешавад.

Адади $\mathrm{A} + x$ ба q тақсим мешавад, агар $x = \mathrm{hq} - \beta$ буда, қимати h чунин интихоб шавад, ки $x$ дар байни ададҳои $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}$ ва $\mathrm{A}_\lambda - \mathrm{A} -$ буда бо адади $x$ аз рӯйи модули $\prod(\mathrm{p})$ муқоисашаванда бошад, он гоҳ ғалбери охирон иҷро мешавад.

Масалан, барои ададҳои дар байни $M = 101$ ва $N = 200$, ғалбери пешакӣ бо қимати $\psi(30) -$ буда дар боло оварда шудааст. Барои он ки ғалбери охирин иҷро шавад, аз қатори ададҳои ёфташуда ададҳои ба 7, 11 ва 13-каратиро хориҷ мекунем. Қимати А –ро гирифта бо ададҳои ба 30 каратӣ ва қиматҳои ба ин адад наздикро ҷустуҷӯ мекунем. Бигузор $\mathrm{A} = 120$ бошад, он гоҳ ҳамаи ин ададҳоро ба намуди $\mathrm{A} + x$, дар фосилаи $-19 < x < 79$ ҷустуҷӯ мекунем. Ҳангоми $\mathrm{q} = 7, 120 = 7 \cdot 17 + 1$ ва $x = 7 \cdot \mathrm{h} - 1, \mathrm{h} -$ адади ҷуфт ва h қиматҳои 2, 0, 2, 4, 6, 8, 10-ро қабул мекунад ва ба қиматҳои мувофиқи $x$:

$$-15, -1, 13, 27, 41, 55, 69$$

баробар мебошад, ки қимати $x$ бо ададҳои 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 ва 29 аз рӯи модули 30 муқоисашаванда мебошад.

Ҳамин тариқ, $x$ се қимат дорад: -1, 13, 41, ки барои онҳо $120 + x$ ба 119, 133, 161 баробар мешавад.

Ин ададҳо ба 7 каратӣ мебошанд. Айнан ҳамин тавр, ададҳои ба 11 каратӣ (121, 143, 187) ва ададҳои ба 13 (143 ва 169) каратӣ мушоҳида карда мешавад. Охирон ададҳои сода дар байни ададҳои 100 то 200 инҳо боқӣ мемонанд:

101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151,
157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

Татқиқоти П.С. Поретский имкон маҳайё сохт, ки ҷудокунии ададҳои содаи калон ва муайянкунии тақсимкунандаҳои содаи ададҳои калон амалӣ карда шавад. Таҳқиқоти ёфтани ададҳои содаи калон ва ёфтани тақсимкунандаҳои содаи онҳо дар корҳои илмии Э. Лебон ҳамчун прогрессияи арифметикии намуди $BK+I$, ки дар ин ҷо $B=2\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot p_{\mathrm{n}}$, $I$ −ададҳои бо $B$ байни ҳам сода мебошад дар адабиёти [82] оварда шудаанд. Адади $I$ ҳамчун $\varphi(B)=(2-1)(3-1)\cdots(p_{\mathrm{n}}-1)$ қимат гирифта, дар намуди муодилаи $BK+I=MD$ ҳал карда мешавад.

Дар ин ҷо $D$ адади намуди $BK'+I'$ буда, $K$ ва $M$ ададҳои номаълум мебошанд. Агар ин муодила ҳалли бутун дошта бошад, он гоҳ адади $BK+I$ адади таркибӣ ва агар муодила ҳалли бутун надошта бошад, он гоҳ $BK+I$ адади сода мебошад. Л. Эйлер ҷадвали қиматҳои аз 17 то қимати $K-$ро тартиб дод, ки ба туфайли он бузургиҳои $K$ ва $M$ тез ҳисоб карда мешаванд. Масалан, барои адади

$$B=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13=30030$$

ёфтани ададҳои содаи аз 1 то $B^2=9018000900$ бо тезӣ имконпазир мегардад.

Таҳқиқоти Э. Лебон, ки ба ҳосилкунии ададҳои калони сода ва таркибӣ ёфтани тақсимкунандаҳои содаи ададҳои калон бахшида шудааст, ба инкишофи назарияи шаклдигаркунии усули ғалбер таъсир расонд. Масалан, он барои ёфтани тақсимкунандаҳои содаи баъзе ададҳои калон истифода мешавад. Шаклдигаркунии «Ғалбери Эратосфен»−ро Ж. Мохедом амалӣ намуд, ки он дар адабиёти [156, с.100-105] оварда шудааст.

Усули Ж. Мохедом ин ҷудокунии ададҳо ба ду прогрессияи $m-$аъзодошта мебошад:

$$a^k+b,2a^k+b,3a^k+b,\cdots,ma^k+b,$$

$$-a^k+b,-2a^k+b,-3a^k+b,\cdots,-ma^k+b.$$

Агар p − адади сода бошад ва ба $a^k$ тақсим нашавад, он гоҳ

$x\equiv x_{kp}(mod\ p)$ мебошад.

Ҳангоми муқоисакунии $a^kx+b\equiv0(mod\ p)$ ададҳои

$$x_{kp},p+x_{kp},2p+x_{kp},\cdots m_pp+x_{kp}$$

ва ададҳои

$$p - x_{kp}, 2p - x_{kp}, 3p - x_{kp}, \cdots, m'_p p - x_{kp}$$

низ монанди прогрессияҳои арифметикӣ буда, ба ададҳои р, $m_p$ ва $m'_p$ каратианд. Адади калонтарини он

$$m_p p + x_{kp} \text{ ва } m'_p p - x_{kp}$$

мебошад. Усули Ж. Мохедомро бо усули рекурент барои ёфтани тақсимкунандаҳои содаи адади намуди

$$x_{k+1} a^{k+1} + b$$

истифода бурдан мумкин аст. Масалан, донистани ҳалҳои муқоисакунии

$$x_k a^k + b \equiv 0 (mod\, p) \text{ ё } \frac{x_k}{a} a^{k+1} + b \equiv 0 (mod\, p)$$

барои ёфтани ҳалли муқоискунии

$$x_{k+1} a^{k+1} + b \equiv 0 (mod\, p)$$

мусоидат мекунад. Ба сифтаи ҳалли ин муқоисакунӣ адади бутуни

$$x_{k+1} \equiv \frac{x_k}{a} \equiv \frac{x_k + yp}{a} (mod\, p),$$

гирифта шуда, қимати минималии $y$ интихоб карда мешавад. Ба ғайр аз ин, ҳалҳои муқосакунии

$$x_k a^k + b \equiv 0 (mod\, p) \text{ ва } x_k a^k - b \equiv 0 (mod\, p) - \text{ро}$$

муайян намудан шарт нест. Агар ин муодилаҳои муқоисакуниро ҷамъ намоем, он гоҳ

$$x_k + x'_k = p$$

ҳосил мешавад.

Ин усул, масалан, ҳангоми $a = 2$ ва $b = 1$ будан, корро хеле осон мегардонад ва барои ёфтани тақсимкунандаҳои содаи адади П. Ферма $2^{2^n} + 1$ мусоидат менамояд. Ба ғайр аз ин, агар $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot p_n$ −ро ҳангоми $b = 1,\ k = 1$ гирем, натиҷаҳои Э. Лебонро ҳосил намудан мумкин аст.

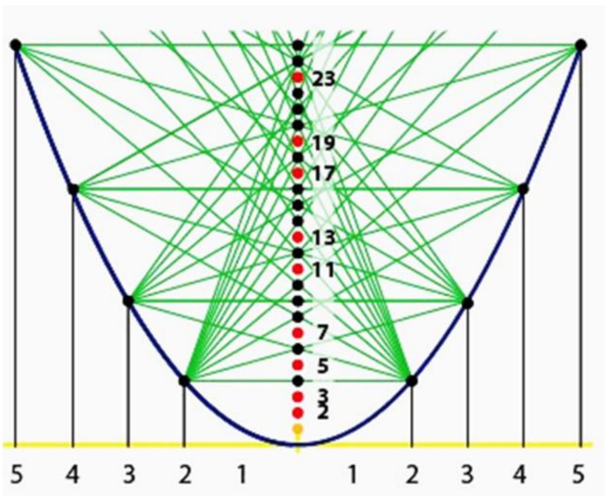
Л. Дайне [153, с. 105-115] $a = 6,\ b = \pm 1$ −ро гирифта ҷадвали тақсимкунандаҳои содаро то 102 миллион тартиб дод. Ба ғайр аз ин, ададҳои содаи бо ҳам наздик (дугоник), ки фарқашон ба 2 воҳид баробар аст, то 4 миллион муайян карда шудааст. Масалан, ифодаи $6^k x_k \pm 1$, барои $k < 10$ ва интихоби $x_k$ ба натиҷае овард, ки ададҳои $6^6 \cdot 2203 \pm 1$ ададҳои содаи бо ҳам наздик (дугоник) 102783167 ва 102783169, адади $6^6 \cdot 198 \pm 1$ ададҳои содаи бо ҳам наздик (дугоник) 9237887 ва 9237889 мебошанд. Аз адади $6^7 \cdot 53 \pm 1$ ададҳои содаи бо ҳам наздик (дугоник) 14836607 ва 14886609-ро ҳосил намудан мумкин аст.

Л. Дайне ададҳои содаи бо ҳам наздик (дугоник)-ро аз рӯи ифодаи $6^{10} x_{10} \pm 1$, ҳангоми $x_{10} = 70$ ёфт, ки онҳо 4232632319 ва 4232632321 мебошанд [153, с. 105-115].

## 2.3. Амсилаҳои муайянкунии ададҳои сода

*Баъзе амсилаҳо барои ёфтани ададҳои сода.* Амсилаҳои зиёди геометрӣ барои дарёфти ададҳои сода мавҷуданд ва онҳо дар шакли формулаҳо пешниҳод мегарданд, ки тавассути онҳо ҳама ададҳои содаро ёфтан мумкин аст. Вале дар асл, ин амсилаҳо аз «Ғалбери Эратосфен» дида ё дигар усулҳои геометрӣ усулҳои одӣ нест.

Яке аз амсилаҳои назаррасро математикҳои рус Юрий Матиясевич (1947) ва Борис Стечкин (1891-1969) бо истифода аз парабола таҳия кардаанд. Онҳо ду шохаи параболаро ба тири *ox* ҷудо мекунанд, ки дар он пайдарпайии ададҳои натуралӣ қайд карда мешавад (расми 5).




Расми 5.

Баъдан перпендикулярҳо ба тири *ох* дар нуқтаҳое, ки ба квадратҳои ададҳои натуралӣ мувофиқанд, кашида мешаванд. Масалан, перпендикуляр дар нуқтаи +4 кашида шуда нуқтаҳои буриши он бо шохаҳои парабола бо адади 2 нишон дода мешавад. Маънои геометрии перпендикуляр аз он иборат аст, ки он ҳосили $2 \cdot 2$ мебошад. Ҳамин тавр, дар нуқтаи 9 перпендикуляри дигарро мекашем, ки он ҳосили зарби $3 \cdot 3$ аст ва ғайра дар тири ох ҳосил мешаванд.

Вақте ки ҳамаи квадратҳои ададҳои тири *ох* бо нуқтаҳои парабола ин тавр ифода карда мешаванд, ҳар як нуқтаи як шохаи парабола ба ҳамаи нуқтаҳои шохаи дигар пайваст мешавад, яъне нуқтаи 2 шохаи болоии парабола аст ва нуқтаҳои 2, 3, 4, 5 ва ғайра ба ҳамин монанд нуқтаҳо ҷойгир мебошанд. Ҳар яке аз ин сегментҳо тири *ох* – ро дар нуқтае мебуранд, ки ба ҳосили ду адади пайваст мувофиқ аст: масалан, сегменти пайвасткунандаи ададҳои 2 ва 3 дар тири *ох* 6-ро мебурад. Дар ниҳоят, нуқтаҳои натуралии тири *ох*, ки тавассути он ҳеҷ яке аз ин сегментҳо намегузаранд, гузаришҳои ададҳои сода хоҳанд буд.

Ғалбери геометрӣ, ки аз ҷониби Ю. Матиясевич ва Б. Стечкин барои ҷустуҷӯи ададҳои сода тарҳрезӣ шудаанд (дар расми 5 оварда шудааст, онҳо бо нуқтаҳои ранга ишора шудаанд) [51].

*ғ) Чи тавр муайян кардан мумкин аст, оё адад адади сода аст.* Ягона роҳи аниқ донистани ададҳои сода ин ба ҳамаи ададҳои содаи пеш аз он тақсим кардани адади додашуда мебошад. Агар он ба ягонтои онҳо тақсим нашавад, пас ин адад адади сода аст. Тавре ки дар боло қайд кардем, гирифтани решаи квадратии адад метавонад кори зиёдеро сарфа кунад. Ин усули хуб барои ададҳои хурд ва ҳисобҳои дастӣ аст. Масалан, мо мехоҳем бидонем, ки адади 101 адади сода аст ё таркибӣ. Донистани қоидаҳои тақсимшавӣ метавонад ба мо кумак кунад. Аён аст, ки 101 ба 2 тақсим намешавад, вагарна рақами охирини он адад ҷуфт ё сифр хоҳад буд. Он ба 3 ҳам тақсим намешавад, зеро ҷамъи рақамҳои он ба 3 тақсим намешавад $(1 + 0 + 1 = 2)$. Инчунин, 101 ба 5 тақсим намешавад, вагарна он бо 0 ё 5 тамом мешавад. Мо инчунин метавонем 4, 6 ва 9-ро партоем, зеро онҳо ба 2 ё 3 каратӣ мебошанд. Агар мо кӯшиш кунем, ки адади 101-ро ба 7 тақсим кунем, 14-тоӣ мерасад ва бақия 3 аст. Ҳамин тавр, адади 101 низ ба 7 тақсим намешавад. Адади навбатӣ сода барои санҷиш 11 аст (101 ба 11 тақсим намешавад). Тақсими адади 101 ба адади содаи 11 бошад, 9 – тоӣ мерасад ва бақияи 2-ро медиҳад. Дар ин ҷо мо метавонем корро қатъ кунем ва бигӯем, ки 101 адади сода аст, зеро решаи квадратии 101 тақрибан ба 10 баробар аст. Ин маънои онро дорад, ки шумораи дигари ададҳои содаи боқимонда ба 101 тақсим намешавад.

Ин усулро номбаркунии тақсимкунанда меноманд, ки аз ҳама содатарин ва боэътимодтарин аст. Мушкилот дар он аст, ки он дар сурати шумораи хеле зиёди ададҳо, ҳатто агар компютер истифода шавад, душворӣ ба миён меорад. Барои ададе аз 50 рақам иборат аст, санҷиши ҳамаи ададҳои то 25 рақам иборатбуда зарур аст, ки ба решаи ин ададҳо камтар ё бисёртар мувофиқ меояд. Компютере, ки қодир аст дар як сония як миллиард тақсимотро иҷро кунад, барои анҷом додани ин санҷиш зиёда аз 300 миллион сол бояд кор кунад.

Аз тарафи дигар, суръат ва хотираи компютерҳои муосир ба таври назаррас афзоиш ёфтааст, ба тавре ки ҷустуҷӯи ададҳои сода аз қатори ададҳои натуралӣ баъзан назар ба раванди мураккаби муайян кардани сода будани адади додашуда самараноктар аст.

*д) Ададҳои гӯё сода.* Дар санҷишҳои ибтидоӣ бештар теоремаи хурди П. Ферма истифода мешавад. Ёдовар мешавем, ки ин теорема чунин таъриф мегардад: «Агар р адади сода бошад, пас барои р хурдтар ($a$ ва $p$ байни ҳам сода) адади $a$ вуҷуд надорад, зеро $a^{p-1}-1$ ҳангоми тақсим ба $p$ бақияи ғайрисифриро медиҳад» [118].

Теорема маҳдудиятҳо дорад, зеро тавре ки дидем, он шарти зарурӣ, вале нокифоя аст. Масалан, агар адади содаи $p = 7$ –ро гирем, мебинем, ки $3^6-1$ ба 7 тақсим мешавад. Ҳеҷ кафолате нест, ки 7 адади сода аст (мо медонем, ки ин адади сода аст, зеро мо ададҳои хурдро мисол гирифтем, аммо мо бояд тасаввур кунем, ки бо ададҳои калон сарукор дорем). Аммо, агар $p = 8$ –ро гирем, мебинем, ки тақсими $3^7 - 1$ ба 8 адади 273,25-ро медиҳад, яъне бақия ғайри сифрӣ аст. Бино бар ин, боварӣ ҳосил мекунем, ки 8 адади сода нест (тақсимкунандаҳои онро наёфта).

Аз тарафи дигар, агар адад аз санҷиш гузарад ва сода бошад, мо асосро «дурӯғ» меномем ва озмоишро идома медиҳем. Эҳтимолияти ёфтани ададҳои «дурӯғ» бо ҳар як санҷиш 1/2 кам мешавад, аз ин рӯ, эҳтимолияти сода будани адад афзоиш меёбад.

Адади $p$, дар ҳоле ки сода набуда, аз санҷиш бо асоси $a$ мегузарад, барои ин асос адади содаи қалбакӣ номида мешавад. Тавсифи умумии бештари адади содаи қалбакиро чунин баён кардан мумкин аст: ададро адади содаи қалбакӣ мегӯянд, агар он аз санҷиши ададҳои сода гузарад, вале таркибӣ шавад.

Вазъият барои ададҳое мураккабтар аст, ки аз санҷишҳо бо ягон тарз мегузаранду аммо адади сода нестанд. Масалан, адади 561 аз санҷиши сода бо ҳама гуна асос мегузарад, вале он таркибӣ аст ($561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$). Ин ададҳоро, математики амрикоӣ Роберт Кармайкл (1879–1967) кашф кардааст, бинобар ин, онҳо «ададҳои Кармайкл» номида мешаванд. Имрӯз 2163 адади Кармайкл маълум аст ва онҳо дар байни 25 миллиард ададҳои натуралӣ мавҷуд мебошанд. Ҳамаи онҳо ҳадди ақал се тақсимкунандаи сода доранд. 16 адади Кармайкл, ки аз 100 000 адад калон нест, мавҷуданд: 561, 1105, 1729, 2465, 2821, 6601, 8911, 10585, 15841, 29341, 41041, 46657, 52633, 62745, 63973, 7536.

Рақамҳои Кармайкл инчунин ададҳои содаи қалбакии мутлақ номида мешаванд.

Ҷустуҷӯи ададҳои сода, ҳадди ақал ададҳои содаи калон кори хеле душвор мебошад, зеро ҳеҷ кас то ҳол формула ё алгоритмеро (эҷод) пайдо накардааст, ки ҳама гуна ададҳои содаи лозимаро ҳосил кунад. Вале саволи мантиқӣ метавонад ба миён ояд: «Чаро ҷустуҷӯи муайянкунии ададҳои сода лозим аст?».

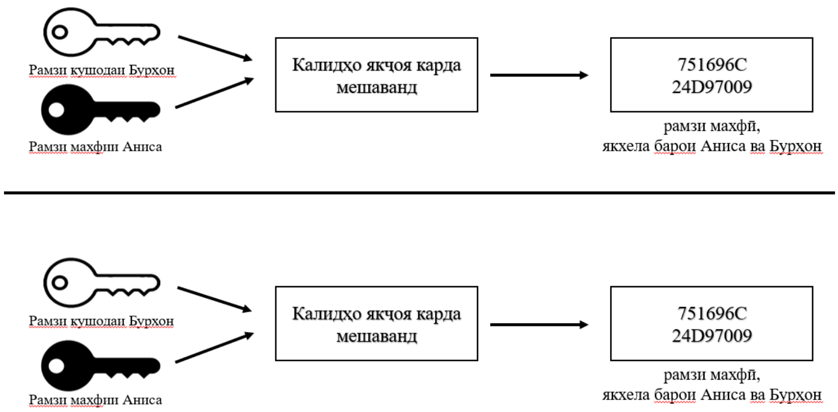
Ба ин савол ду ҷавоб додан мумкин аст. Якум, ин амал аҳамияти назариявӣ дорад. Кӯшишҳои ҷустуҷӯкунии ёфтани ададҳои сода боиси пайдоиши воситаҳои нави ҷолиб барои ҳисобҳо, махсусан барои ҳисобҳои компютерӣ мегардад. Илова бар ин, мавҷуд будани рӯйхати ҷадвали ададҳои содаи калон ба мо имкон медиҳад, ки натиҷаҳои баҳогузошташударо санҷем.

Як сабаби дигари амалии ададҳои сода низ вуҷуд дорад, ки бо номи рамзгузорӣ алоқаманд аст. Почтаи электронӣ, бонкӣ, кортҳои кредитӣ ва телефонҳои мобилӣ – ҳама бо рамзҳои махфӣ муҳофизат карда мешаванд, ки бевосита ба хусусиятҳои ададҳои сода асос ёфтаанд.

*Яке аз татбиқҳои ин назария дар криптография мебошад.* Криптография (аз калимаи юнонӣ κρυπτός «пинҳон» + γράφω «менависам») илм дар бораи усулҳои таъмини махфият (имконнопазирии хондани маълумот ба шахсони бегона), якпорчагии маълумот (имконнопазирии ба таври чашмрас тағйир додани иттилоот), тасдиқи аслияти муаллиф (ё дигар хосиятҳои объект), рамзгузорӣ (рамзгузории маълумот) мебошад.

Соли 1975, Уитфилд Диффи ва Мартин Ҳеллман, ки он вақт дар Донишгоҳи Стэнфорд фаъолият мекарданд, идеяи рамзгузории асимметрӣ ё «рамзгузории калиди ҷамъиятӣ» -ро ба миён оварданд. Ин система ба функсияҳои махсуси математикӣ асос ёфтааст, ки «воридшавӣ бо даромадгоҳи махфӣ» ном доранд, онҳо ба мо имкон медиҳанд, матнҳоро рамзгузорӣ кунем, аммо рамзкушоӣ бидуни донистани рамзи истифодашуда дар бисёр маврид ғайриимкон мебошад. Моҳияташ дар он аст, ки ҳар як корбар як ҷуфт калид дорад: ҷамъиятӣ (умумӣ) ва хусусӣ. Агар мо хоҳем, ки ба касе паём фиристем, мо он паёмро бо калиди ҷамъиятӣ рамзгузорӣ мекунем, яъне калиди ба ҳама маълум. Аммо танҳо шахсе, ки калиди махфии мувофиқ дорад, метавонад ин паёмро рамзкушоӣ кунад. Яке аз бартариҳои ин усул дар он аст, ки калиди махфӣ ҳеҷ гоҳ интиқол дода намешавад ва аз ин рӯ, бо сабабҳои амниятӣ пайваста иваз кардан лозим нест. Моҳияти ин усул чандон сода нест, аммо мо метавонем онро бо ёрии муқоиса шарҳ диҳем. Тасаввур мекунем, ки дар мағозаи калон, садҳо ҳазор банкаҳои рангҳои гуногундоштаро мефурӯшанд. Ихтиёрӣ ду банкаро гиред ва рангро ба миқдори гуногун омехта кунед. То ҳол ҳама чиз одӣ аст. Акнун, агар мо ба касе ранги аввалинро нишон диҳем ва аз онҳо «дешифр»-куниро бипурсем, ки дар аввал чандтои кадом рангҳо истифода шуда буданд, ҷавоб додан ба чунин савол хеле душвор хоҳад буд.

Чунин аст, ки яктарафа бо кори даромадгоҳи махфӣ, ки дар як самт татбиқ кардан осон аст, аммо дар самти дигар қариб ғайриимкон мебошад.




Расми 6.

Диаграммаи тасвири алгоритми Диффи-Хелман. Аниса ва Бурҳон мехоҳанд, ки пинҳонӣ муошират кунанд. Онҳо ошкоро дар бораи ду адад (ададҳои сода $p$ ва адади дигари $g$ дорои хосиятҳои муайян) мувофиқат мекунанд. Ҳар ду, Аниса ва Бурҳон, баъзе амалҳоро дар ин ададҳо ва дигар адади бутун, ки онҳо махфӣ нигоҳ медоранд, анҷом медиҳанд ва сипас натиҷаҳоро ба ҳамдигар ошкоро мефиристанд. Акнун ҳам Аниса ва ҳам Бурҳон амалиёти дигарро бо натиҷаи ба даст овардашуда иҷро мекунанд ва ҳамон ҷавобро мегиранд, ки барои онҳо рамзи махфӣ хоҳад буд. Ҷосуси эҳтимолӣ, ки натиҷаҳои фиристодаи Аниса ва Бурҳонро боздошт мекунад, наметавонад танҳо бо ин маълумот рамзи махфӣ ҷорӣ кунад.

Фарз мекунем, ки ҳоло дар мағоза ба ҷои қуттиҳои ранг ададҳои сода мавҷуданд. Ду ададро, масалан 7 ва 13-ро мегирем ва онҳоро зарб мекунем (монанди омехтаи ранг). Дар натиҷа, мо $7 \cdot 13 = 91$ ба даст меорем.

Пас саволе ба миён меояд: оё муайян кардан мумкин аст, ки кадом ададҳои содаро зарб карда, адади 91-ро ба даст овардем? Барои ҷавоб додан ба он, бояд рӯйхати ададҳои содаро гирем ва якчанд санҷишро ба анҷом расонем. Ин як роҳи ҳалли одӣ ба монанди муайян кардани ранги рангҳо ба назар мерасад, агар дар мағоза танҳо даҳҳо рангҳои асосӣ мавҷуд бошад.

$$P_1 \cdot P_2 = x$$

$$\xrightarrow{\text{Хело осон}}$$

$$\xleftarrow{\text{Хело душвор}}$$

Дар ибтидо криптография усулҳои рамзгузории информатсия – табдили баръакси матни кушода (сарчашма) – ро дар асоси алгоритми махфӣ ё калидро ба матни рамзӣ (шифрӣ) меомӯхт. Криптографияи анъанавӣ як шохаи криптосистемаҳои симметриро ташкил медиҳад, ки дар онҳо рамзгузорӣ ва рамзкушоӣ бо истифода аз як калиди махфӣ анҷом дода мешавад [72, с.8].

Мисол: Рамзи ATBASH, (Атбаш (ибрӣ אתבש) як рамзи ивазкунандаи одӣ барои навиштани алифбо мебошад. Қоидаи рамзгузорӣ аз он иборат аст, ки бояд *i* ҳарфи алифбо бо рақами *n-i+1* иваз карда шавад, то дар он n (ададҳои миқдори ҳарфҳо дар алифбо), ки дар он калид алифбои баръакси забоне мебошад, ки матн дар он рамзгузорӣ шудааст.

Аммо кор бо ададҳои сода, хеле мураккабтар аст: масалан, ҳеҷ кас тоқат надорад, то санҷиш кунад, ки адади 1409 305 684 859 натиҷаи зарб задани ададҳои содаи 705 967 ва 1996 277 мебошад, хусусан бо дарназардошти он, ки ин ду адад аз рӯйхати ададҳои содаи аз 1 то 2000000 гирифта шудаанд ва чунин ададҳо ҳамагӣ 148933– то ҳастанд. Вале, мо, ки дар замони технологияи баланд зиндагӣ мекунем ва албатта, ин мушкилотро метавонем бо ёрии барномаи хуб ва компютери пуриқтидор хеле зуд ҳал кунем.

Ҳарчанд ҳамааш ба он вобаста аст, ки ин сехи рангубор то чӣ андоза калон аст. Инчунин набояд фаромӯш кард, ки шумораи ададҳои сода на танҳо хеле зиёд, балки беохир аст.

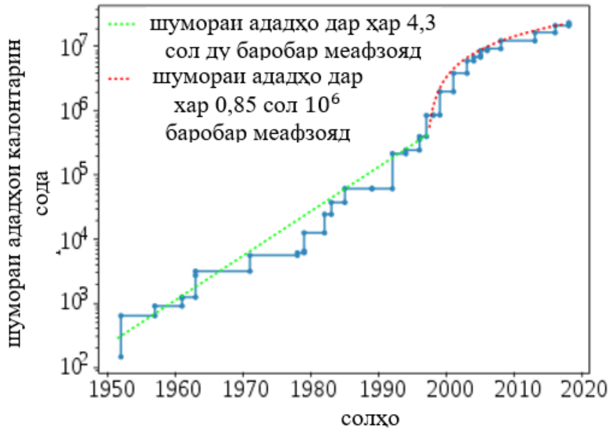
Ҷуфти ададҳои сода дар мисоли боло танҳо чанд ададро дар бар мегирад. Агар мо ададҳои содаеро гирем, ки ҳар яки онҳо садҳо ададро дар бар гиранд, он гоҳ ба мо барои ба таври одӣ номбар кардани ҳамаи вариантҳои имконпазир барномаи компютерии чуноне ки криптографҳо мегӯянд, усули «қувваи беандоза», зарур аст.

Ададҳои сода дар ҳаёти ҳаррӯзаи мо, аз қабили дар кортҳои кредитӣ ва компютерҳои шахсӣ мавҷуданд, аз ин рӯ, ҳамеша барои тавлиди рамзҳои махфӣ ба нави ададҳои сода (зиёдтар) лозим аст. Ҳамин тариқ, талабот ба ададҳои сода вуҷуд дорад, вале назорати сифат ба мисли истеҳсоли онҳо муҳим аст. Барои ба шумораи калон додани мақоми ададҳои сода, он бояд аз ҷониби ташкилоти махсус тафтиш карда шавад.

Рамзи RSA соли 1978 нашр шуд, вале то охири солҳои 1990 бо сабаби афзоиши интернет ҳамчун усули рамзгузорӣ васеъ истифода нагардид. Ҷустуҷӯи ададҳои калони сода нармафзори махсусро талаб мекард, ки онро чун қоида, танҳо аз фирмаҳои махсус ё донишгоҳҳое, ки ба чунин таҳқиқот машғул буданд, харидан мумкин буд. Бо вуҷуди ин, афзоиши экспоненсиалии қудрати ҳисоббарорӣ ва пайдоиши алгоритмҳои беҳтар бозори ададҳои содаро тағйир дод ва онҳоро хеле дастрастар кард [72, с. 88-91].

Моҳи апрели соли 1994 шифри RSA-129 ба шикасти пурра дучор шуд. Он дар як адади дорои 129 рақам сохта шуд ва муаллифони ин системаи рамзгузорӣ эълон кардаанд, ки хоҳишмандон метавонанд онро вайрон кунанд. Тақрибан 600 риёзидон бо кумаки 1600 ихтиёриён, ки тавассути Интернет пайдо шуданд, дар болои ин масъала кор карданд ва дар ниҳоят ба онҳо муяссар шуд, ки ин ададро ҳосил кунанд. Бо вуҷуди ин, ҳисоб карда шудааст, ки агар ҳамаи компютерҳои ҷаҳон барои шикастани рамзи аз 1024-рақам иборатбуда дар як вақт якҷоя кор кунанд, ба онҳо (13,7 миллиард сол) вақт лозим мешавад. Акнун тасаввур кунед, ки рамзгузории калиди оммавӣ ададҳои дорои 128, 1024 ва ҳатто 2048 рақамро истифода мебарад! Чи қадаре ки системаи рамзгузорӣ ададҳоро бештар истифода барад, он ба ҳамлаҳо ҳамон қадар тобовартар мешавад, ҳарчанде ки ин, албатта, раванди рамзкушоиро суст мекунад.

Калонтарин адади содаро бо ёрии компютер дар фосилаи муайян ёфтан мумкин аст ва ин дар расми зерин инъикос ёфтааст.




Расми 7.

Бо мурури замон тағйирёбии қимати адади содаи маълум аз замони пайдоиши компютери аввал; ғунҷоиши адад дар ҷадвали масштаби логарифмӣ намуди вертикалӣ кашида мешавад; хати сурх ба экспоненти беҳтарин мувофиқ аст (англ.): $y = \exp(0{,}187394\, t - 360{,}527)$, ки дар он t вақт бо сол аст.

Дар ин муддат бузургтарин адади сода $2^{136\,279\,841} - 1$ муайян шудааст. Инро математики америкоӣ Люк Дюрант (1881) дар доираи лоиҳаи GIMPS 12 октябри соли 2024 пайдо карда буд ва он 41 024 320 рақамро дар бар мегирад. Ин 52-юмин адади содаи мерсенн мебошад. Аз ҳама адади калонтарини то ҳол муайяншуда адади содаи $2^{82589933}-1$ мебошад. Онро мутахассиси IT-и америкоӣ Патрик Ларош (1983) дар доираи лоиҳаи GIMPS, 7 декабри соли 2018, пайдо карда буд, ки он 24 862 048 рақамро дар бар мегирад.

*е) Ададҳои содаи палиндромӣ.* Адади содае, ки он адади палиндромӣ мешавад, яъне ин ададҳо дар системаи муайяни шумораҳои мавқеӣ (одатан даҳӣ) ҳам аз рост ба чап ва ҳам аз чап ба рост якхел хонда мешавад. Палиндромӣ ба базаи ададҳо вобастагӣ дорад, вале ададҳои сода бошад вобастагӣ надорад.

Якчанд ададҳои содаи аввалини палиндромӣ дар системаи ададҳои даҳӣ (системаи ҳисоби позитсионии даҳӣ буда, ба базаи ададҳои бутун асос меёбад. Яке аз системаҳои маъмултарин буда, он рақамҳои 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 - ро истифода мебарад, ки рақамҳои арабӣ номида мешаванд) (пайдарпаии A002385 дар OEIS (энсиклопедияи онлайнии пайдарпайи ададҳои бутуни энсиклопедияи онлайнии ададҳои Фибоначи, ададҳои Белл, ададҳои Каталона ва ададҳои содаро дар бар мегирад):

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 101,\ 131,\ 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727,$$
$$757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311 \dots$$

Бузургтарин адади содаи палиндромӣ соли 1991 аз ҷониби муҳандиси барқ ва математик Ҳарви Дубнер (1928–2019) кашф шудааст. Ифодаи он ба таври зерин навишта мешавад [47, с. 148]:

$$10^{11310} + 4661664 \cdot 10^{5652} + 1.$$

Маълум аст, ки ададҳои палиндромӣ дар пайдарпайии ададҳои натуралӣ дар баробари зиёд шуданашон камёбтар мешаванд. Агар ҳар як адади якрақама аз рӯи таъриф палиндром бошад, пас дар ҳудуди аз 10 то 1000 на бештар аз 10 фоизи онҳо вуҷуд доранд ва дар ҳудуди аз 1000 то 100000 аллакай тақрибан 1 фоизи онҳо вуҷуд доранд.

Бузургтарин адади содаи палиндроми маълум 18 октябри соли 2021, аз ҷониби Райан Проппер ва Сергей Баталов кашф шудааст, ки он аз 1 888 529 рақам иборат буда ба ифодаи

$$10^{1888529} - 10^{944264} - 1$$

баробар аст [47, с. 148].

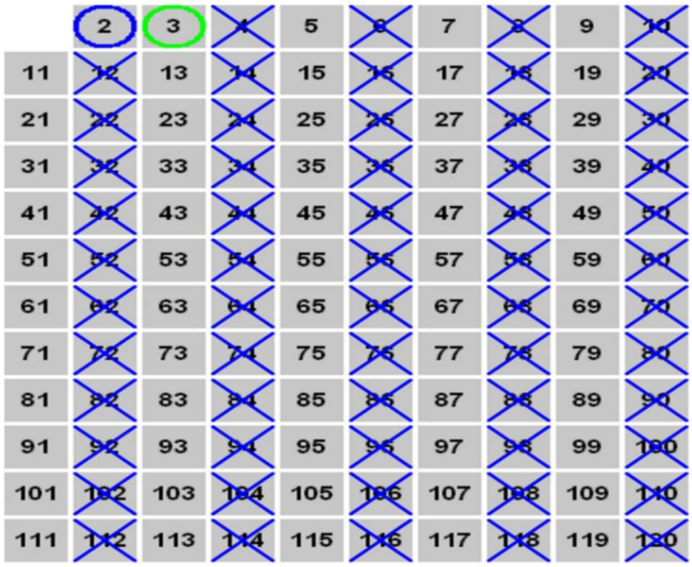
Якчанд ададҳои содаи палиндромӣ дар ҷадвали зерин иникос ёфтааст.

| *ранг* | *ибтидоӣ* | *рақам* | *кай* | *шарҳ* |
|---|---|---|---|---|
| *1* | $10^{180004}+248797842 \cdot 10^{89998}+1$ | *180005* | *авг 2007* | *Палиндром* |
| *2* | $10^{175108}+230767032 \cdot 10^{87550}+1$ | *175109* | *июн 2007* | *Палиндром* |
| *3* | $10^{170006}+3880883 \cdot 10^{85000}+1$ | *170007* | *Октябрь 2006* | *Палиндром* |
| *4* | $10^{160016}+8231328 \cdot 10^{80005}+1$ | *160017* | *Май 2006* | *Палиндром* |
| *5* | $10^{150008}+4798974 \cdot 10^{75001}+1$ | *150009* | *фев 2006* | *Палиндром* |
| *6* | $10^{150006}+7426247 \cdot 10^{75000}+1$ | *150007* | *дек 2005* | *Палиндром* |
| *7* | $10^{140008}+4546454 \cdot 10^{70001}+1$ | *140009* | *дек 2005* | *Палиндром* |
| *8* | $10^{130048}+(9 \cdot 10^{37077-2})/11 \cdot 10^{46486}+1$ | *130049* | *Сен 2008* | *Тетрадный палиндром* |
| *9* | $10^{130036}+116010611 \cdot 10^{65014}+1$ | *130037* | *дек 2004* | *Палиндром* |
| *10* | $10^{130022}+3761673 \cdot 10^{65008}+1$ | *130023* | *ноя 2004* | *Палиндром* |
| *11* | $10^{127576}+1081101080188810801011801 \cdot 10^{63776}+1$ | *127577* | *янв 2006* | *Тетрадный, палиндромный* |
| *12* | $10^{120016}+1726271 \cdot 10^{60005}+1$ | *120017* | *Апр 2004* | *Палиндром* |
| *13* | $10^{120002}+1617161 \cdot 10^{59998}+1$ | *120003* | *Апр 2004* | *Палиндром* |
| *14* | $10^{105022}+523111325 \cdot 10^{52507}+1$ | *105023* | *фев 2008* | *Палиндром* |
| *15* | $10^{105018}+920383029 \cdot 10^{52505}+1$ | *105019* | *Май 2008* | *Палиндром* |
| *16* | $10^{105016}+318939813 \cdot 10^{52504}+1$ | *105017* | *янв 2008* | *Палиндром* |
| *17* | $10^{105014}+682787286 \cdot 10^{52503}+1$ | *105015* | *Апр 2008* | *Палиндром* |
| *18* | $10^{105014}+424787424 \cdot 10^{52503}+1$ | *105015* | *фев 2008* | *Палиндром* |
| *19* | $10^{105012}+560949065 \cdot 10^{52502}+1$ | *105013* | *июл 2008* | *Палиндром* |
| *20* | $10^{105012}+432909234 \cdot 10^{52502}+1$ | *105013* | *Май 2008* | *Палиндром* |

Ҷадвали 10.

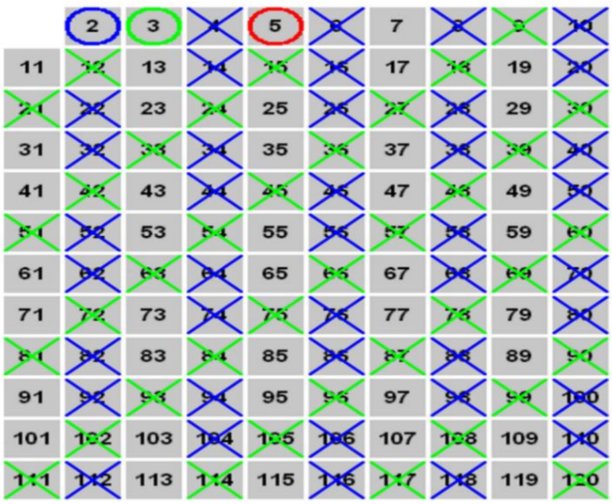
Қатори ададҳои содаро ба туфайли барномаи компютерии «Power Point» бо усули «Ғалбери Эратосфен» ҳосил мекунем. Барои ин, дар ҷадвал пайдарпаии ададҳои натуралии аз 2 то 120-ро навишта, аз байни онҳо ададҳои содаро бо тарзи зерин ҷустуҷӯ мекунем (ададҳои таркибӣ хат зада мешаванд):

Аввалин ададӣ аз 1 калони ин қатор, адади 2 аст. Ин адад танҳо ба 1 ва ба худаш тақсим мешавад, пас вай сода аст.



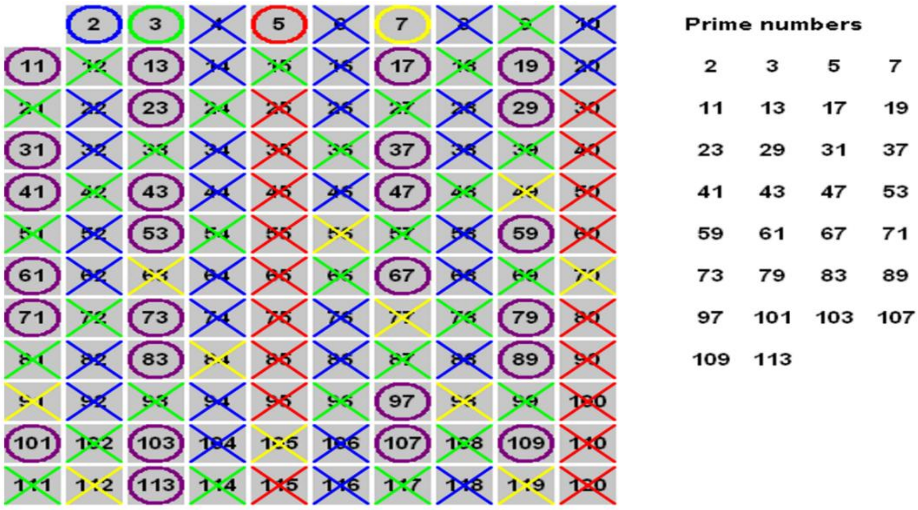
Ҷадвали 11.

Дар ҷадвал ба ғайр аз худи 2 ҳамаи ададҳои ба 2 каратибударо (чун ададҳои таркибӣ) хат мезанем. Баъди 2 аввалин адади хатназада, адади 3 аст. Вай ба 2 тақсим намешавад (дар акси ҳол онро бояд хат занем). Бинобар ин, адади 3 танҳо ба 1 ва ба худаш тақсим мешавад, аз ин сабаб он ҳам адади сода аст. Дар ҷадвали ададҳо ба ғайр аз худи 3 ҳамаи ададҳои ба 3 каратиро хат мезанем.



Ҷадвали 12.

Аввалин адади пас аз адади 3 хатназадашуда, адади 5 аст. Вай ба 2 ва 3 тақсим намешавад (дар акси ҳол онро бояд хат мезадем). Бинобар ин, 5 танҳо ба 1 ва ба худаш тақсим мешавад, аз ин сабаб он ҳам адади сода аст ва ҳоказо. Дар мисоли мо баъди хат задани амали чорум фақат ададҳои сода мемонад.




Чадвали 13.

Дар замони муосир, барои ҳосилкунии ададҳои сода барномаҳои компютерӣ мавҷуд буда, аз ҳама усули одӣ ва самараноктарин ин «Ғалбери Эратосфен» буда, зиёда аз 100 миллион ададҳои сода ёфт шудааст [28].

## ХУЛОСАИ БОБИ II

Дар рушди омӯзиши назарияи ададҳои сода аз олимони Апрупоӣ, ба монанди Ферма, Эйлер, Голдбах, Гаусс, Риман ва дигарон саҳми босазо гузоштаанд.

Дар математика (назарияи ададҳои сода) теоремаи Вилсон арзишманд мебошад, ки дар он чунин омадааст:

Агар $p$-адади сода бошад, он гоҳ $(p-1)!+1$ ба $p$ тақсим мешавад.

Дар боби мазкур оид ба ададҳои содаи Мерсенн, ки бо номи олими фаронсавии асри XVII алоқаманд аст, маълумот баён мегардад. Вобаста ба ин баъдтар теоремаи зерин ба миён омад:

*Теоремаи Е. Люк-Д.Х. Лемер.* Адади $M_p$, ки $p>2$ аст, фақат ва фақат дар он мавриде сода мешавад, ки агар аъзои $(p-1)$ – уми $(S_{p-1})$ пайдарпаии рекурентии (формулаҳое, ки онҳо барои ифода кардани аъзоҳои ояндаи (бо рақами калон) пай дар пай бо аъзоҳои пешгузаштаашон (бо рақами хурд) имконият медиҳанд, рекурентӣ номида мешавад)

$$S_1=4, S_2=14, \cdots, S_{k+1}=S_k^2-2$$

ба $M_p$ тақсим шавад.

Дар ин боб, инчунин маълумот оид ба чӣ тавр муайян намудани адади сода, ҷадвали ададҳои содаи калонтарин ва дигар корҳои олимони аврупоӣ дар ин самт оварда шудааст.

Ҳамин тавр, муаммои муайянкунии қонунияти ададҳои сода ва тақсимшавии онҳо ба қатори ададҳои натуралӣ аз замони математикони Юнони қадим тафаккури инсониятро ба худ ҷалб кардааст. Ба шарофати кори Евклид ба мо маълум аст, ки ададҳои сода беохиранд. Эратосфен ва Сунтарам аввалин алгоритмҳои санҷиши ададҳоро барои содагӣ пешниҳод карданд. Эйлер, Ферма, Лежандр ва бисёр дигар риёзидонҳои машҳур барои ҳосилкунии  ададҳои сода кӯшиш мекарданд. То имрӯз, бисёр алгоритмҳо ва тарзҳои нав пайдо ва пешниҳод шудаанд, аммо ҳамаи онҳо танҳо барои як қатори ниҳоии ададҳои сода ё ададҳои содаи навъи махсус татбиқ мешаванд.

Дар зербоби дуюм бошад татбиқшавии «Ғалбери Эратосфен» аз тарафи олимони рус П.С. Поретский, А. Слудский, Э.К. Шпачинский, В.Я. Буняковский, А. Полинияк, П.Л. Чебишев ва ғайра таҳқиқ шуда, дастовардҳои зиёди онҳо тавсиф ёфтаанд. Масалан, Г.В. Лейбнис пешниҳод кард, ки ҳамаи ададҳои содаро, ба ғайр аз 2 ва 3, дар прогресияҳои $6k + 1$ ва $6k + 5$ дидан мумкин аст. Аммо ӯ кӯшиш накард, қисми зиёди корҳои худро нашр кунад, аз ин рӯ, масъалаи ифодаи ададҳои сода дар шакли прогрессияи дар боло овардашуда то имрӯз пурра нагаштааст. Татбиқшавии ғалбер нисбат ба ин прогресияҳо соли 1887 аз тарафи математики шаҳри Қазон (Россияи подшоҳӣ) П.С. Поретский (солҳои 1846-1907) пешниҳод шудааст.

Ҳамин тариқ, таҳқиқоти аввалин шаклтағйирдиҳии «Ғалбери Эратосфен»–ро, олими руси асри XIX профессори донишгоҳи Москва, яке аз ташкилкунандаҳои ҷамъияти математикон – астроном, механик ва риёзидон А. Слудский (солҳои 1841-1897) анҷом додааст. Ӯ барои инкишофи назарияи ададҳо [6] фаъолона кӯшиш намуда, ақидаи «Ғалбери Эратосфен»–ро бо имкониятҳои гуногун пешниҳод кард, ки дар рисола баён шудааст. Илова бар ин, Э.К. Шпачинский соли 1888 дар маҷаллаи «Вестник опытной физики и элементарной физики» дар бораи шакли дигари шаклдигаркунии «Ғалбери Эратосфен», ба монанди А. Слудский роҳҳои ҷудокунии ададҳои содаро дар дилхоҳ фосилаи ададии ададҳои тоқ нишон дод. Ғайр аз ин, академики Академияи илмҳои ш. Петербург В.Я. Буняковский (солҳои 1801-1889) шаклтағйирдиҳии «Ғалбери Эратосфен»–ро дар намуди прогрессияи арифметикӣ бо фарқи прогрессия ба 10 баробар татбиқ намуд. Моҳияти кори В.Я. Буняковский ба ҳалли муодилаҳои бутуни дуномаълумаи миқдори муодилаҳои номаълум оварда расонд. Мавқеи асосиро дар пешниҳоди В.Я. Буняковский ёфтани хурдтарин тақсимкунандаи сода барои ададі калон ташкил медиҳад.

Олимон дар муайянкунии ададҳои сода амсилаҳои гуногун, аз ҷумла амсилаи геометриро низ пешниҳод намудаанд. Дар ин самт амсилаи геометрӣ, бо истифодаи парабола, ки аз ҷониби олимони рус Ю. Матиясевич ва Б. Стечкин таҳия намудаанд, аҳамиятнок аст.

Ададҳои сода калиди ҳалли аксар масъалаҳои математикӣ буда, дар криптография (рамзгузорӣ) низ нақши калон доранд, ки бинобар ин, онҳо на танҳо барои математикҳо, балки барои ҳарбиён, кашшофӣ (разведка) ва контрразведка низ таваҷҷуҳ доранд. Аз давраҳои қадим то ин инҷониб, олимон тадриҷан ҳосилкунии ададҳои сода аз қатори ададҳои натуралӣ пешрафт карданд ва дар даҳсолаҳои охир компютерҳо дар санҷиши тақсимшавандагии ададҳои бузург кумаки калон расонд. Математикҳо ва баъдтар, барномасозони компютерӣ роҳҳои зиёдеро барои ҳалли ин масъала, яъне ҳосилкунии ададҳои сода таҳия кардаанд.

# БОБИ III. ТАҲҚИҚИ НАЗАРИЯИ АДАДҲОИ СОДА ДАР ТОҶИКИСТОН

## 3.1. Ташаккул ва рушди мактабҳои илмӣ оид ба назарияи ададҳои сода дар замони шуравӣ

Ташаккул ва рушди назарияи ададҳо дар замони шуравӣ ба қуллаҳои баланди илмӣ расид, ки дар он саҳми олимони шуравӣ, ба монанди П.Л. Чебишев[124, 125], В. Линник [62, 63, 64, 65], А.Я. Хинчин [118], Н.П. Романов [96], А.Г. Постников [77], А.О. Гелфонд [100], И.М. Виноградов [20, 21, 22, 23, 24, 25], А.А. Каратсуба [44, 45, 46], Н. Г. Чудаков [122, 123] ва дигарон назаррас буда, онҳо корҳои олимони маъруфи Аврупо ба монанди Л. Эйлер, Х. Голдбах, К.Ф. Гаусс, А. Лежандр, П. Дирихле, А.Ф. Миёбиус, Ж. Салвестер, Ҷ.И. Литлвуд, Ж. Адамар, Б. Риман ва ғайраро идома дода, дар рушди назарияи ададҳои сода ба дастовардҳои баланди илмӣ ноил гаштанд. Аз ин лиҳоз, пеш аз он, ки ба тавсифи корҳои олимони шуравӣ оғоз намоем, сараввал корҳои олимони Аврупоро мухтасар баён месозем.

*Роҳҳои аниқ ва тақрибии муайян намудани қиматҳои* $\pi(x)$. Дар ин мавзуъ барои формулаи аниқ қадами устуворро Л. Эйлер [19, с. 81-88] гузошт:

$$\varphi(n) = n\prod_{p/n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Дар ин формула миқдори ададҳои байни ҳам сода то $n$ ҳисоб карда мешавад. Ба воситаи функсияи Л. Эйлер $\varphi(n)$ ҳисоби аниқи функсияи $\pi(x)$ пайдо шуд. Пеш аз Л. Эйлер барои ёфтани формула таҳқиқоти А. Лежандр (солҳои 1752-1833) асос гузошт. Ӯ соли 1830 шакли нави ғалбериро барои муайянкунии миқдори ададҳои прогрессияи $KA - C$ $(K = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$, ки ба ягон адади содаи $\mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot \cdots \cdot \mathrm{p}_n$ тақсим намешаванд, бо формулаи зерин муайян кард:

$$m-\sum_{1\le i\le r}\left[\frac{m+(p_i)_0}{p_i}\right]+\sum_{1\le i<j\le r}\left[\frac{m+\left(p_ip_j\right)_0}{p_ip_j}\right]-\cdots,$$

ки дар ин ҷо $[x]$ – қисми бутуни $x$, $(a)_0$ – адади хурдтарини мусбат буда, $(a)_0A-C$ бо $a$ каратӣ мебошад, ё ба ибораи дигар $(a)_0$ ҳалли хурдтарини муқоисакунии

$$Ax\equiv C(mod\ a)$$

мебошад.

А. Лежандр қайд мекунад, ки агар $\mathrm{p}_1=2, \cdot\ \mathrm{p}_2=3, \cdot \cdots \cdot\ \mathrm{p}_r\le\sqrt{Am-C}$ бошад, формулаи ӯ миқдори ададҳои содаро дар прогрессияи $KA-C$, ки дар байни $\sqrt{Am-C}$ ва $mA-C$ мехобанд, муайян мекунад. Дар ҳолати хусусӣ ҳангоми $A=1$ ва $\mathrm{C}=0$ будан миқдори ададҳои содаро дар байни $\sqrt{m}$ ва $m$ ба ифодаи зерини

$$m-\sum_{1\le i\le r}\left[\frac{m}{p_i}\right]+\sum_{1\le i<j\le r}\left[\frac{m}{p_ip_j}\right]-\sum_{1\le i<j<k\le r}\left[\frac{m}{p_ip_jp_k}\right]+\cdots$$

ёфтан мумкин аст.

Аз нуқтаи назари ҳозиразамон исботи Лежандро ба таври ҷиддӣ қабул намудан шарт нест. Онро ба осонӣ асоснок намудан мумкин аст. Ҳангоми

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$$

будан $\varphi(n)$ – ро ба шакли зерин ифода намудан мумкин аст:

$$\varphi(n)=n-\sum_{1\le i\le r}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le r}\frac{n}{p_ip_j}-\cdots.$$

Соли 1857 Ж. Лиувилл (1809-1882) дар [133, с. 24] қайд намуд, ки аз баробарии Гаусс

$$m=\sum_{d/m}\varphi(d)$$

баробарии $\varphi(n)$ мебарояд. Бинобар он, усули коркарди олими олмонӣ А.Ф. Миёбиус (1790-1868) нисбатан бартарии калон дошт. А.Ф. Миёбиус соли 1832 тасдиқоти зеринро пешниҳод намуд, ки агар

$$F(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f(sx)}{s^m} \text{ бошад, он гоҳ}$$

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu(s) \frac{F(sx)}{s^m},$$

мешавад, ки дар ин ҷо

$$\mu(s) = \begin{cases} 1, & \text{агар } s = 1, \\ 0, & \text{агар } p^2/s, \\ (-1)^k, & \text{агар } s = p_1 p_2 \cdots p_k. \end{cases}$$

аст. Ин таври тасдиқотро соли 1857 Р. Дедекинд (1831-1916) чунин ифода намуд:

$$\text{агар } F(x) = \textstyle\sum_{\frac{d}{m}} f(d), \text{ он гоҳ}$$

$$f(m) = F(m) - \sum_{1 \le i \le r} F\left(\frac{m}{p_i}\right) + \sum_{1 \le i < j \le r} F\left(\frac{m}{p_i p_j}\right) - \cdots,$$

аст, ки дар ин ҷо $p_1 p_2 \cdots p_r -$ тақсимкунандаҳои содаи адади $m$ мебошанд.

Баробариҳои охирини ёфташуда чи хеле ки дар [74, 75, с. 62] нишон дода шудааст, аз тарафи Ж. Лиувилл ва Р. Дедекинд муқаррар шуданд. Онҳо гӯё формулаи Лежандрро пештар муайян намуда буданд, аммо ин ба ҳақиқат мувофиқат намекунад. Дар ҳақиқат формулаи Лежандр пеш аз ин аз тарафи Е. Жонкёр (1820-1901) соли 1882 пешниҳод шуда буд. Е. Жонкёр дар [133, с.25] нишон медиҳад, ки миқдори ададҳои содаро то ҳудуди муайян аз формулаи зерин ёфтан мумкин аст:

$$\pi(x) = \pi(\sqrt{x}) - 1 + \sum (-1)^m \left[\frac{x}{2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \cdots p_m^\omega}\right],$$

ки дар ин ҷо $p_m -$ адади содаи калонтарине, ки аз $\sqrt{x}$ калон нест, $\alpha, \beta, \cdots, \omega$ қиматҳои 0 ё 1-ро қабул мекунанд, $m -$ адади зарбкунандаҳои содае, ки дараҷаи як мебошанд.

Е. Жонкёр исбот мекунад, ки ҷойгиршавии ададҳои сода ё тақсимшавии онҳо дар ҳар як фосилаи ҷойгиршавӣ як маротиба ба ҳисоб гирифта мешавад. Соли 1882 ӯ дар [133, с. 25] нишон дод, ки формулаи А.

Лежандр ин мавзуи назарияҳои ададӣ мебошад. Ӯ қайд менамояд, ки А. Лежандр нишон надодааст, ки агар дар адад ду тақсимкунандаи сода оварда шавад, яке аз он ба эътибор гирифта намешавад.

Дар кори худ Е. Жонкёр исботи ҳолатҳоеро, ки адад аз $x$ калон нест ва ба $p_i$ – каратӣ нест нишон додааст. Миқдори ададҳое, ки аз $x$ калон нест ва ба $p_i$ – каратӣ мебошад, ба $\left[\frac{x}{p_i}\right]$ баробар аст. Аз миқдори $[x]$ барои ҳамаи $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ ададҳое, ки бо ду адади содаи $p_i$ ва $p_j$ каратӣ мебошанд, ба ҷои 1 воҳид, 2 воҳид тарҳ карда мешавад. Бинобар ин, ба ададҳои боқимондаи $p_i$ ва $p_j$ адади $\left[\frac{x}{p_i\, p_j}\right]$ бояд илова карда шавад. Масалан, барои ададҳои $p_1, p_2, p_3$ аввал се воҳид тарҳ шуда, баъд се воҳид илова карда мешавад,

$$\left(-\left[\frac{x}{p_2}\right], -\left[\frac{x}{p_2}\right], -\left[\frac{x}{p_3}\right], -\left[\frac{x}{p_1 p_2}\right], -\left[\frac{x}{p_2 p_3}\right], -\left[\frac{x}{p_2 p_3}\right]\right),$$

яъне аз худи адади $[x]$ ҳеҷ чиз кам карда намешавад.

Давомнокии ин ҷараёни кор ба он оварда расонд, ки адади $x$, ки ба $m$ ададҳои содаи $\mathrm{p}_1 \cdot \mathrm{p}_2 \cdot \cdots \cdot \mathrm{p}_m$ тақсим мегардад, бо формулаи зерин ҳисоб карда мешавад:

$$m - C_m^2 + C_m^3 - \cdots + (-1)^{m-1} C_m^{m_1} = 1 - (1-1)^m = 1.$$

Р. Лифшитс (1832-1908) дар мактубҳояш нишон дод, ки тасдиқоти Е. Жонкёр пешакӣ формулаи А. Лежандрро кушод ва ба ҳалли масъалаҳои зиёд мусоидат намуд. Он, пеш аз ҳама, бо усулҳои одитарини ҳалли масъалаҳои гузошташуда бо тасдиқоти зерин оварда расонид [133, с. 26]:

агар $F(n) = \sum_{1 \le m \le n} \tau(m)$,

$$G(n) = \sum_{1 \le m \le n} \sigma(m),$$

$$\Phi(n) = \sum_{1 \le m \le n} \varphi(m),$$

он гоҳ

$$\sum_{1\le k\le n}\mu(k)\,F\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right)=n,$$

$$\sum_{1\le k\le n}k\mu(k)\,G\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right)=n,$$

$$\sum_{1\le k\le n}\mu(k)\,D\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right)=\ \Phi(n),$$

ки барои адади бутуни мусбати $m$ $\tau(m)-$ миқдори тақсимкунандаҳо, $\sigma(m)-$ суммаи тақсимкунандаҳо, $\varphi(m)-$ функсияи Л. Эйлер ва $\mathrm{D}(n)=\frac{m^2+m}{2}-$ адади секунҷавӣ мебошад.

Р. Лифшитс «Ғалбери Эратосфен»–ро ҷамъбаст намуда, қимати $\pi(n)-$ ро бо формулаи зерин нишод дод:

$$\pi(n)=\sum_{1\le k\le n}\frac{\mu(k)}{k}\,Ii\left(\sqrt[k]{n}\right),$$

ки дар ин ҷо

$$Ii(x)=\int_2^x\frac{du}{\log u},$$

буда, онро Б. Риман бе исбот пешниҳод намуд, вале натиҷаи дилхоҳ нагирифт, зеро формулаи Б. Риман фақат барои $x<10^9$ ҳангоми ҳисобкуниҳо татбиқ мегардад. Дар ибтидои асри XX маълум шуд, ки нобаробарии

$$\pi(x)<\ Ii(x)$$

барои дилхоҳ $x$ ҷой надорад. Дар ин хусус дар адабиёти [125] қайд гардид, ки ин формулаи Б. Риман минбаъд татбиқ карда нашуд.

Формулаи Лежандр ба муайян намудани ададҳои содаи то $x$ бо он асоснок карда шуд, ки агар ҳамаи ададҳои каратиро то $\sqrt{x}$ хат занем, ададҳои боқимонда ададҳои сода мебошанд. Шаклдигаркунии «Ғалбери Эратосфен» аз тарафи А. Полиняк (1826-1863) бисёр муҳим буда, он дар адабиёти илмӣ оварда шудааст. Дар ғалбери А. Полиняк қатори ададҳои натуралӣ аз 0 сар карда омӯхта мешавад. Диққати асосӣ ба ададҳои хатзаданашудаи ду адад равона карда шудааст. Бо ифодаи А. Полиняк масофаи байни ду адади хатназадашуда ба эътибор гирифта мешавад.

Бигузор дар пайдарпайии

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, \cdots$$

аз 0 сар карда, ҳамаи ададҳои ҷуфтро хат мезанем, он гоҳ ададҳои

$$1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15 \cdots$$

боқӣ мемонанд. Дар ин ҷо фарқи ин ададҳо ба 1 баробар буда, пайдарпайии дуатомии воҳидӣ ҳосил мешавад:

$$1, 1, 1, 1, 1, \cdots$$

Баъд аз он аз 0 сар карда аз се адад яктоашро хат мезанем, пайдарпайии дуатомии дуюм ҳосил мешавад:

$$1, 3, 1, 3, 1, 3, \cdots.$$

Аз қатори адади дар боло нишон додашуда аз ҳар панҷтои он яктояшро хат зада, дар натиҷа пайдарпайии сеюми дуатомиро ҳосил мекунем:

$$1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5, \cdots.$$

Дар ҷараёни пай дар пай тартиб додани пайдарпайиҳои дуатомӣ А. Полиняк нишон дод, ки барои дилхоҳ $n-1$ пайдарпайӣ аз сифр сар карда ҳар як $p_n$ хат зада мешавад. Хосиятҳои пайдарпайии дуатомӣ, хусусан даврӣ будани онро соли 1849 омӯхта, ӯ ба формулае дучор омад, ки новобаста ба А. Полиняк онро П.Л. Чебишев [124, 125] ҳосил карда буд:

Бигзор $p$ адади сода,

$$\theta(x)\sum_{p\le x}\log p$$

(барои $0 \le x < 2$ қимати $\theta(x) = 0$ буда)

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta\left(\sqrt{x}\right) + \theta\left(\sqrt[3]{x}\right) + \cdots,$$

барои $n > N_0, \sqrt[n]{x} < 2, \theta\left(\sqrt[n]{x}\right) = 0$ мебошад.

Барои

$$T = \sum_{k=1}^{[x]}\log k = \log([x]!) \text{ Формулаи}$$

$$T(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots$$

дуруст мебошад.

Бо ифодаи П.Л. Чебишев баробарии охирон манбаи асосӣ барои муайян намудани сарҳади ададҳои сода мебошад. П.Л. Чебишев барои исбот постулатаи Ж. Бертранро (1822-1900) дар бораи мавҷудияти ададҳои сода дар байни ададҳои $a$ ва $2a - 2$ барои ҳамаи $a \geq 2$ истифода намуд. А. Полиняк бо ёрии формулаи

$$T(x) = \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots$$

теоремаҳои сустро исбот намуд:

а) дар байни адади сода ва адади каратии он ақаллан як адади сода мавҷуд аст;

б) дар байни ду дараҷаи пайдарпайии як адад, ақаллан якто адади сода мавҷуд аст.

Дар нимаи дуюми асри XIX шаклҳои гуногуни ифодакунии аналитикии умумӣ барои «Ғалбери Эратосфен» пайдо шуд ва татбиқи он бемайлон пеш рафт. Масалан, соли 1883 математики англис Ж. Салвестер (1814-1897) қайд намуд, ки теоремаи А. Лежандр яке аз теоремаҳои мантиқии пурракунии принсипи Ж. Силвестер мебошад. Ин принсип усули дида баромадани маҷмуи элементҳое, ки ҳосиятҳои онро дорост ва ба ҳисоби элементҳо мувофиқат мекунад [133, с. 28].

Бигзор маҷмуе дода шудааст, ки $N$ –то элемент дорад ва бигзор $N_a$ – миқдори ададҳое, ки хосияти $a$ –ро дорад, $N_b$ – миқдори ададҳое, ки хосияти $b$ –ро дорад ва ғайраҳо. Айнан ҳамин тавр, $N_{ab}, N_{ac}, \cdots, N_{ab\cdots m}$ –мувофиқан миқдори ададҳое мебошанд, ки элементҳо хосиятҳои $a$ ва $b$, $a$ ва с, $\cdots, ab \cdots m$ –ро доранд, он гоҳ ба ифодаи зерин баробар аст:

$$N - (N_a + N_b + \cdots + N_m) +$$
$$+(N_{ab} + N_{ac} + \cdots + N_{km}) -$$
$$- \cdots\cdots\cdots\cdots \pm$$

$$N_{ab\cdots m}.$$

Баробарии ҳосилшуда бо интерпретатсияи мувофиқ ба ифодаи аксиоматикии ғалбери Эратосфен табдил меёбад:

$$I_1(N,Z) = \sum_{\overline{\pi_z}} \mu(n)\, N_n,$$

ки дар ин ҷо $I_k(N,Z) -$ миқдори аъзоҳои пайдарпайии $a_1, a_2, \cdots, a_N$, буда $k$ –тақсим шаванда, ки ба ягон адади содаи $z$ тақсим мешавад, $\pi_z -$ ҳосили зарби ҳамаи ададҳои содаи аз $z$ хурд мебошад.

Ж. Салвестер боз ду формулаи умумикардашударо, ки ба А. Лежандр тааллуқ дорад, муқаррар кард, ки яке аз он барои ҳисоби суммаи ададҳои сода мебошад.

Ж. Салвестер формулаи зеринро пешниҳод менамояд;

$$\sum_{p\le n} p + 1 = D(n) - \sum_{p_i \le \sqrt{n}} p_i\, D\left(\left[\frac{n}{p_i}\right]\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{p_i, p_j \le \sqrt{n} \\ i<j}} p_i\, p_j D\left(\left[\frac{n}{p_i p_j}\right]\right) - \sum_{\substack{p_i, p_j p_k \le \sqrt{n} \\ i<j<k}} p_i\, p_j p_k D\left(\left[\frac{n}{p_i p_j p_k}\right]\right) + \cdots,$$

ки дар ин ҷо $D(x) = \frac{x^2+x}{2}$ аст.

Формулаи умумикардашудаи Ж. Салвестер, чи хеле ки Э. Люк [133, с. 29] хабар медиҳад, ададҳои содаи аз $n$ калон ва аз $2n$ хурд, ҳангоми $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ будан ададҳои сода мебошад. Дар ин маврид $p_n^2$ аз $2n$ калон набуда, ба ифодаи зерин баробар аст:

$$m - \sum_{p_i^2 \le 2n} H \frac{m}{p_i} + \sum_{\substack{p_i^2\ p_j^2 \le 2n \\ i\le j}} H \frac{m}{p_i p_j} - \sum_{\substack{p_i^2\ p_j^2 p_k^2 \le 2n \\ i\le j<k}} H \frac{m}{p_i p_j p_k} + \cdots,$$

ки дар ин ҷо

$$Hx = \begin{cases} x, \ \text{агар}\ \{x\} = \dfrac{1}{2}, \\ [x], \ \text{агар}\ \{x\} < \dfrac{1}{2}, \\ [x] + 1, \ \text{агар}\ \{x\} > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$\{x\}$ – қисми касрии адади $x$ мебошад.

Формулаи А. Лежандр барои ифодаи аналитикии «Ғалбери Эратосфен» хеле мувофиқ бошад ҳам, аз камбудиҳо холӣ нест. Якум, миқдори ҷамъшавандаҳо ҳангоми афзуншавии $x$ хеле зиёд мешавад, дуюм, дар зери аломати сумма ишораи қисми бутуни $x$ мебошад, сеюм, он ки ёфтани ададҳои содаро барои ададҳои аз $\sqrt{x}$ хурд талаб мекунад.

Дар лаҳзаҳои гуногуни таърихӣ барои халос шудан аз камбудии формулаи А. Лежандр, формулаи шакли нав коркард шуд. Масалан, формулаи рекурентии ёфтани функсияи $\pi(x)$ пайдо шуд. Э. Мейсел (1826-1895) дар адабиёти [155, с. 636-692] исбот намуд, ки формулаи зерин дуруст аст.

$$\pi(x) = \Phi\left(x, \ \sqrt[3]{x}\right) - \sum_{\sqrt[3]{x} < p \leq \sqrt{x}} \pi\left(\frac{x}{p}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left(\pi\sqrt{x}\right) + \pi\sqrt[3]{x} - 2\right)\left(\pi\left(\sqrt{x}\right) - \pi\left(\sqrt[3]{x}\right) + 1\right),$$

ки дар ин ҷо $\Phi\left(x, \ \sqrt[3]{x}\right)$ адади аз $x$ хурд буда, ба ягон адади содаи то $\sqrt[3]{x}$ – буда тақсим намешавад. Усули Э. Мейсел бо он асоснок карда шуд, ки ба туфайли истифодаи он ададҳои ками содаро дар қатори ададӣ муайян кардан мумкин аст. Соли 1890 Ф. Рогел (1852-1901) дар адабиёти [155, с. 636-692] ақидаи Э. Мейселро инкишоф дода, нишон дод, ки ҳангоми ҳисобкунии $\pi(x)$ – қисми ками ададҳои содаро истифода бурда, формулаи Э. Мейселро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\pi(x) = |x| \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \prod_{r=m+1}^{n} \pi\left(\frac{x}{p_r}\right) + \binom{n}{2} - \binom{m-1}{2},$$

ки дар ин ҷо аломати $|x|$ монанди ишораи анте буда, хосияти зеринро дорад:

$$|x|\cdot\frac{1}{p_2p_3\cdots}=\left|\frac{1}{p_2p_3\cdots}\right|,$$

$m-$ чунин адади бутунест, ки ҳангоми $p_m\le\sqrt[3]{x}<p_{m+1}$, будан $n=\pi(x)$, $\binom{n}{2}$ ва $\binom{m-1}{2}$ – коэффитсиентҳои биномиалӣ мебошанд.

Барои адади бутуни $k$, ки шарти $p_k\le\sqrt[4]{x}<p_{k+1}$ –ро қаноат мекунонад, Ф. Рогел исбот намуд, ки

$$\pi(x)=|x|\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\prod_{r=k+1}^{n}\pi\left(\frac{x}{p_r}\right)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{m-k}\sum_{r=m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}\pi\left(\frac{x}{p_{m-\nu+1}p_r}\right)+\sum_{\nu=0}^{m-1}\binom{n^{(\nu)}}{2}-\binom{m}{3}+\binom{k-1}{3},$$

буда, дар ин ҷо $n^{(\nu)}$ чунин ададест, ки барои он

$$p_n^{(x)}<r^{\frac{1}{\nu+2}}$$

мебошад.

Баъди ин барои адади бутуни $k$, ки $p_k\le\sqrt[5]{x}<p_{k+1}$ аст, Ф. Рогел формулаи зеринро исбот намуд:

$$\pi(x)=|x|\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\sum_{r=k+1}^{n}\pi\left(\frac{x}{p_r}\right)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{m-h}\sum_{r=m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}\pi\left(\frac{x}{p_{m-\nu+1}p_r}\right)-\sum_{\mu=1}^{k-h}\sum_{\nu=0}^{m_\mu-k+\mu}\binom{n^{(\nu)}{}_{\mu}}{2}-$$

$$-\sum_{\mu=0}^{k-h}\binom{m_\mu}{3}+\binom{k}{4}+\binom{k-1}{4}.$$

Дар бахши ҷамъбастӣ формула барои дилхоҳ адади $q$, ҳангоми $p_l\le\sqrt[q]{x}<p_{l+1}$ будан намуди зеринро мегирад:

$$\pi(x)=|x|\prod_{i=2}^{l}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)-\sum_{r=l+1}^{n}\pi\left(\frac{x}{p_r}\right)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{m-l}\sum_{r=m-\nu+1}^{n^{(\nu)}}\pi\left(\frac{x}{p_{m-\nu+1}p_r}\right)-$$

$$\sum_{\mu=1}^{k-l}\sum_{\nu=0}^{m_\mu-k+\mu}\sum_{r=m_\mu-\nu+1}^{m_\mu}\pi\left(\frac{x}{p_{m_\mu-\nu+1}p_{x-\mu+1}p_r}\right)-\cdots+$$

$$+(-1)^{q-1}\binom{k}{q-1}+(-1)^{q}\binom{c-1}{q-1}.$$

Ҳамин тавр, гузориши «Ғалбери Эратосфен» оид ба масъалаи тасвири аналитикии ададҳои содаи аз $x$ зиёд набуда, барои ҷойгиркунии ададҳои сода бо ёрии истифодаи ками ададҳои сода оварда расонд. Дар ибтидои асри XX муайян шуд, ки ин натиҷаҳоро бо ёрии формулаи ягонаи назариявӣ−функсионалии дар асоси омӯзиши суммаи функсияҳои махсус дохилнамудаи Н.В. Бугаев (1837-1903), ки дар адабиёти [13] оварда шудааст, муайян намудан мумкин аст. «Функсияҳои ададии аргументаш аз рӯи ададҳои содаи аз $\sqrt{x}$ калон набуда, дар корҳои илмии М. Чиполла дар нишон дода шудааст. Ин барои исботи формулаҳои Лежандр, Мейсел ва Рогел мусоидат намуд» [140, с. 253-267].

М. Чиполла суммаи функсияҳои арифметикии

$$f(k,x)=\sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]}f(n\,k)$$

ва суммаи

$$\sum_{\frac{k}{x}}g(h)$$

дида баромадааст.

Маълум мешавад, ки якум

$$f(k,x)-f(k,x-1)=\begin{cases}0, & \text{агар } k \text{ ба } x \text{ тақсим нашавад,}\\ f(x), & \text{агар } k \text{ ба } x \text{ тақсим шавад,}\end{cases}$$

ва дуюм

$$f(x)\sum_{k/x} g(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \{f(k,x) - f(k,x-1)\}\, g(k)$$

мебошад. Баробариҳои айниятии охиронро аз рӯи $x$ ҷамъ намуда, таносуби зеринро пайдо намудан мумкин аст:

$$\sum_{x=1}^{n} f(x) \sum_{d/x} g(h) = \sum_{x=1}^{n} g(x) \sum_{n=1}^{\left[\frac{x}{k}\right]} f(k\, x) = \sum_{k=1}^{n} g(x)\, f(k,n).$$

Баробарии айниятии охирин манбаи хосияти арифметикии адади калон мебошад. Дар ҳолатҳои хусусӣ аз он формулаҳои Лежандр, Мейсел ва Рогелро ҳосил кардан мумкин аст.

Формулаҳои Мейсел ва Рогел ду норасоии ҷиддӣ доранд: «якум, зиёд намудани ҷамъшавандаҳо ҳангоми кам кардани адади тақсимкунандаҳои сода, дуюм, дар ин формулаҳо мавҷуд будани функсияи $\Phi\left(x,\ x^{\frac{1}{n}}\right)$. Бинобар ин, ба Мейсел ва Рогел муяссар нашуд, ки формулаи пурраи Лежандрро ҳосил кунанд. Барои аз функсияи $\Phi\left(x,\ x^{\frac{1}{n}}\right)$ пурра озод шудан ҳангоми ҷобаҷогузории формулаи рекурентии $\pi(x)$ аввалин маротиба соли 1943 А.А. Бухштаб дар адабиёти [17, с. 152-160] формулаи зеринро истифода намуд:

$$\sum_{k\in\omega_1} \pi\left(\frac{x}{k}\right) - \sum_{k\in\omega_2} \begin{pmatrix} \pi\sqrt{\frac{x}{k}} \\ 2 \end{pmatrix} + \sum_{k\in\omega_3} \begin{pmatrix} \pi\left(\sqrt[3]{\frac{x}{k}}\right) \\ 3 \end{pmatrix} - \cdots = x - 1,$$

ки дар ин ҷо $\omega_s$ – соҳаи қиматҳо дар суммаи $s$ – ум, ки аз ададҳои воҳидии $k$ иборат буда, барои $\frac{p}{k}$ нобаробарии $p^s k \le x$ ҷой дошта

$$\begin{pmatrix} \pi\left(\sqrt[s]{\frac{x}{k}}\right) \\ s \end{pmatrix}$$

– коэффитсиенти биномалӣ мебошад.

Масъалаи имконияти таҳқиқи формулаи Лежандр барои баҳодиҳии $\pi(x)$ ба хатоӣ ҳангоми иваз кардани адади бутун ба аъзоҳои худи адад алоқаманд мебошад. П. Паги (1847-1903) мушоҳида намуд, ки агар дар формулаи

$$\pi(n)-\pi(\sqrt{\pi})+1=n-\sum\left[\frac{n}{p_i}\right]+\sum\left[\frac{n}{p_ip_j}\right]-\cdots\pm\sum\left[\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}\right]$$

ишораи $N=\sum\left[\frac{n}{p_i}\right]+\sum\left[\frac{n}{p_ip_j}\right]-\cdots\pm\sum\left[\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}\right]$ –ро

дохил кунем ва $\left[\frac{n}{d}\right]$ –ро ба $\frac{n}{d}$ иваз намоем, он гоҳ $N$ –ро бо ифодаи зерин иваз намудан мумкин аст:

$$n\sum\frac{1}{p_i}-n\sum\frac{1}{p_ip_j}+\cdots\pm\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}=$$

$$=n\left(1-\frac{\varphi(p_1p_2\cdots p_k)}{p_1p_2\cdots p_k}\right),$$

ки дар ин ҷо $\varphi(n)$-функсияи Л. Эйлер мебошад [19, 43]. Вале ӯ хатоиҳои ҳосилшударо таҳқиқ накард. Пайдоиши хатоиҳо ё фарқиятҳоро ҳангоми иваз намудани қисми бутуни адад ба худи ададро дар адабиёти Л. Кронекер (1823-1891) нишон дод. Азбаски $[x]=x-\{x\}$ бо $0\le\{x\}<1$ аст, он гоҳ

$$\pi(x)=\pi(\sqrt{x})-1+\sum_{\frac{d}{p}}\mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]=$$

$$=\pi(\sqrt{x})-1+x\sum_{\frac{d}{p}}\frac{\mu(d)}{d}+\varepsilon A=$$

$$=\pi(\sqrt{x})-1+x\prod_{p\le\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\varepsilon A,$$

мешавад, ки дар ин ҷо $\rho=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_k$ $\left(p_1<p_2<\cdots<p_k\le\sqrt{x}\right),\varepsilon-$ касри мусбат ё манфӣ $|\varepsilon|<1$ мебошад. Дар ин маврид хатоиҳои ҳосилшуда дар байни $-A$ то $A$

$$A = \sum_{k=0}^{\pi(\sqrt{x})} \binom{\pi(\sqrt{x})}{k} = 2^{\pi(\sqrt{x})}$$

мешавад.

Ҳамин тариқ, хатоии пайдошуда аз тартиби бузургӣ зиёд нест:

$$2^{\pi(\sqrt{x})+1}.$$

Барои $\prod_{p\leq p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ соли 1874 Ф. Мертенс (1840-1903) хатоиро ба намуди баробарӣ ҳосил намуд $\frac{e^{a-c}}{\log p_n}$, ки дар ин ҷо с-доимии Л. Эйлер буда, аз муносибати зерин пайдо мешавад:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right), \quad \lim_{p_n\to\infty} a = O.$$

Бузургии $2^{\pi(\sqrt{x})}$ нисбат ба $x$ тезтар меафзояд, бинобар ин, фарқияти миқдори ададҳои сода то $x$ нисбат ба $x$ калон мешавад. Маълум шуд, ки ин гуна формулаи тақрибиро барои муайян намудани ададҳои содае, ки дар як сарҳади муайян мебошанд, истифода намудан мумкин аст. Бо ҳамин давраи пайдоиши формулаҳои тақрибӣ бо баҳодиҳии хатоиҳои пайдошуда ҷамъбаст гардид. Ба ғайр аз ин, дар ибтидои асри XX масъалаи навишти асимтотии формулаи «Ғалбери Эратосфен» бе аломати анте пайдо шуд, ки дар асоси он бояд формулаи тақрибӣ барои ёфтани миқдори ададҳои сода пешниҳод шавад. В.И. Романовский (1879-1954) дар адабиёти [93, 94, 95] нишон дод, ки агар

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = \sum_{\frac{d}{p}} \mu(d)\left[\frac{n}{d}\right], \qquad P = \prod_{p\leq\sqrt{p}} p$$

бошад, он гоҳ бо гузориши $\left[\frac{n}{d}\right] = \frac{n}{d} - \left\{\frac{n}{d}\right\}$,

баробарии зерин ҳосил мешавад:

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = n\sum_{\frac{d}{p}}\frac{\mu(d)}{d} - \sum_{\frac{d}{p}}\mu(d)\left\{\frac{x}{d}\right\} =$$

$$= n \prod_{p \le p_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \sum (n, k),$$

ки дар ин ҷо $p_k \le \sqrt{n} < p_{k+1}$,

$$\sum (n, k) = \sum_{1 \le i \le k} \left\{\frac{n}{p_k}\right\} - \sum_{1 \le i < j \le k} \left\{\frac{n}{p_i p_j}\right\} + \cdots + (-1)^k \left\{\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}\right\}.$$

Аз ин формулаи аниқ ҳангоми партофтани аъзои $\sum(n, k)$ формулаи тақрибӣ ҳосил мешавад ва хатоии содиршударо бо ёрии дигар формулаҳои тақрибии ёфтани $\pi(x)$ баҳо додан мумкин аст.

Дар ҳақиқат, агар

$$\omega(n) = n \sum_{p \le p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \pi(\sqrt{n}) - 1 = \frac{n e^{-c}}{\log p_n} + \pi(\sqrt{n}) - 1,$$

бошад, он гоҳ бо дарназардошти

$$\pi(n) = \frac{n + \varepsilon n}{\log n} : \lim_{n \to \infty} \varepsilon = 0,$$

ҳосил мекунем:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\omega(n)}{\pi(n)} = 2e^{-c}.$$

Ҳангоми $\pi(n) \sim \frac{1}{2} e^{-c} w(n)$ будан формула чунин шаклро мегирад:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n} + \frac{1}{2}\left(\pi(\sqrt{n}) - 1\right) e^c$$

барои қиматҳои калони $n$ бошад

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum(n, k)}{\pi(n)} = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{\omega(n)}{\pi(n)} \simeq \frac{1}{8}$$

мешавад.

Ин нишон медиҳад, ки $\pi(n)$ ва $\sum(n, k)$ бузургиҳои тартиби якхела мебошанд, аз ин рӯ, иваз намудани $\left(\frac{n}{d}\right)$ ба $\frac{n}{d}$ имконият намедиҳад, ки формуларо асоснок намоем. В.И. Романовский формулаи ҳисоби тақрибии ададҳои сода

$$\pi(n) \simeq n \prod_{p \le \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - \text{ро}$$

таҳия намуд, ки ба ҷадвали ададҳои сода мувофиқат мекунад. Дар ҳақиқат формула барои ёфтани қиматҳои хурди $n$ оварда шудааст. Дар ин ҷо қайд мешавад, ки ёфтани ададҳои содаи бо ҳам наздик, ки фарқашон ба ду баробар аст, бо ёрии формула имконпазир мебошад. Барои ёфтани ҳисоби ҷуфти ададҳои содаи бо ҳам наздик ҷадвали мувофиқ тартиб дода натиҷаҳои зеринро ҳосил мекунем:

| $p_n$ | $p_{n+1}^2$ | $A_{(p^2n+1)}$ | $T_{(p^2n+1)}$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 25 | 4 | 4 |
| 5 | 49 | 6 | 6 |
| 7 | 121 | 10 | 10 |
| 11 | 169 | 12 | 12 |
| 13 | 289 | 17 | 19 |
| 17 | 361 | 19 | 21 |
| 19 | 529 | 24 | 24 |
| 23 | 841 | 32 | 32 |
| 29 | 961 | 36 | 34 |
| 31 | 1369 | 47 | 45 |
| 37 | 1631 | 54 | 52 |
| 41 | 1849 | 57 | 55 |
| 43 | 2209 | 64 | 66 |
| 47 | 2809 | 77 | 78 |

Ҷадвали 11.

Дар ин ҷо $T(n)-$ қимати аниқи ададҳои содаи бо ҳам наздик, барои ададҳои то $n$ буда,

$$\Lambda(n) = \frac{n}{2}\prod_{2<p\le p_k}\left(1-\frac{1}{n}\right)+k-r$$

мебошад, ки дар ин ҷо $k$ —адади ҷуфти бо ҳам наздики ададҳои сода дар $(1,\ \ p_{k+2})$ буда

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{агар } p_{k+2}=3 \\ 0, & \text{дар ҳолатҳои боқимонда.} \end{cases}$$

Формулаи боло барои ҳисоби $\Lambda(n)$ формулаи тақрибии ёфтани ҷуфти ададҳои содаи бо ҳам наздик мебошад, ки аз ифодаи аналитикии ғалберии қисми касриаш партофташуда ҳосил мешавад. Муқоисакунии қиматҳои $\Lambda(n)$ ва $T(n)$ дар ҷадвал нишон медиҳад, ки фарқияти қиматҳо чандон калон намебошанд. Чи хеле ки дар [94, с. 1-67] нишон дода шудааст, шакли эвристикии формула барои $\Lambda(n)$ пайдо шудааст.

Дар адабиёти [95, с. 1-47] масъалаи ёфтани ду адади бо ҳам наздики сода, ки суммаашон ба $2a$ баробар аст, бо ғалбери Эратосфен алоқаманд мебошад. Барои ин ададҳои содаи бо ҳам наздик, ки суммаашон ба $2a$ баробар аст, формулаи тақрибии зерин пайдо шудааст:

$$G(2a) \simeq \frac{4e^{-c}a}{\log^2 2a} \prod_{\substack{\frac{p}{a} \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2}.$$

Таҳқиқоти В.И. Романовский новобаста ба мавҷуд будани норасоиҳо, нарасидани натиҷаҳои аниқ ва душвориҳо имконият дод, ки миқдори ададҳои содаи бо ҳам наздик муайян карда шавад. Илова ба ин, ёфтани суммаи ду адади сода бо истифодаи дукаратаи «Ғалбери Эратосфен» ба миён омад.

Истифодаи дукарата ва бисёркаратаи «Ғалбери Эратосфен» ба муодилаи $x + y = 2a$ оварда расонд, ки ин бори аввал дар корҳои илмии Ж. Мерлэн [94, с. 1-67] баррасӣ шуд. Дар кории илмии Ж. Мерлэн оид ба ёфтани ададҳои содаи бо ҳам наздик ва дар эҷодиёти Голдбах-Эйлер бо истифодаи дукаратаи «Ғалбери Эратосфен» ин масъала пешниҳод карда шуд. Дар адабиёти [94, с. 1-67] дар муқоса бо адабиёти [95, с. 1-42] принсипи дигари кори ҳисобкунӣ оварда шудааст. Аз ин ҷо хулоса мебароядь, ки таҳқиқоти илмии В.И. Романовский ва Ж. Мерлэн аз якдигар вобастагӣ надоранд. Мазмуни корҳои илмии Ж. Мерлэн дар адабиёти [13] аз тарафи олим Ж. Адамар ба таври муфассал нишон дода шуд.

Методикаи асосии Ж. Адамар ин интихоби амалиёти $A(b, a)$ мебошад, ки аз хатзании ададҳои прогрессияи $ax + b, (a, b) = 1, b < a$ дар интервали аз 0 то $A$ иборат мебошад. Аввалин прогрессия бо ададҳои $P_1 = 2$ сохта шуда, баъд ду прогрессия бо формулаҳои $P_i > 2 \ (i = 2, \ 3, \ \cdots)$ тартиб дода мешаванд:

$$r_i + P_i x \ \text{ ва } \ r_i' + P_i x.$$

Бо ёрии онҳо амалҳои зерин иҷро карда мешаванд:

$$A(r_1, P_1),$$

$$A(r_2, P_2) \text{ ва } A(r_2', P_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A(r_n, P_n) \text{ ва } A(r_n', P_n),$$

ки дар ин ҷо $r$ ба 0 ва 1 баробар буда, $0 \leq r_i \leq P_i, 0 \leq r_i' \leq P_i$, ҳангоми $i = 2,\ 3,\ \cdots, r_i \neq r_2'$ мешавад. Дар ҳолати хусусӣ, агар $P_1 = 2 < P_2 < \cdots < P_n \leq \sqrt{A}$ бошад ва дар интервали аз 0 то А (А − адади бутун) ҳамон ададҳои $xP_i, (i = 2,\ 3,\ \cdots)$ хат зада шуда бошанд, бо қавли Ж. Мерлэн ғалбер аз ибтидо мегирад. Ба ғайр аз ин, дар ин интервал ҳамаи ададҳои А $+\ xP_i$ хат зада шуда, $x -$ қимати бутуни манфӣ қабул менамояд. Дар ин маврид интервали аз 0 то адади А, ки дар интервали $xP_i$ ва А $+\ xP_i$ намехобад, ба $P$ ва А $- P'$ баробар шуда, $P =$ А $- P',\ P, P'$ ададҳои сода мебошанд. Аз ин ҷо бармеояд, ки адади А ба суммаи ду адади сода баробар мебошад. Аз ин мулоҳизаҳо чунин натиҷа мебарояд: Ж. Мерлэн боварӣ дошт, ки масъалаи ҳалли проблемаи (мушкили) Голдбах-Эйлер ба гузоштани ҳалли муодилаи $P_{n+1} - P_n = 2$ мувофиқат мекунад. Ин гузориш ба он оварда мерасонад, ки системаи зерин

$$\begin{cases} P_{n+1} - P_n = 2 \\ P_{n+2} - P_{n+1} = 4 \end{cases}$$

ҳалҳои бешумор дошта, $P_n$ адади сода мебошад.

Чи хеле ки В.И. Романовский қайд менамояд, истифодаи дукаратаи «Ғалбери Эратосфен» бо тақрибӣ ҳисоб намудани ададҳои содаи бо ҳам наздик мувофиқат мекунад. Роҳи ҳалли ин мушкилотро Ж. Мерлэн пешниҳод кард, вале баъдтар маълум гардид, ки усули пешниҳодкарди Ж. Мерлэн низ камбудиҳо доштааст. Соли 1915 чи хеле, ки дар [13] қайд шудааст, Ж. Адамар нишон дод, ки усули пешниҳоднамудаи Ж. Мерлэн ба натиҷаҳои умумӣ оварда намерасонад ва танҳо дар ҳолати хусусӣ истифода мешавад.

Масъалаи асосии истифодабарии дукаратаи «Ғалбери Эратосфен», ки дар фосилаи аз А то адади В дида мешавад, дар прогрессияи А В −

миқдори ададҳои хатзадашуда бо аъзоҳои $A(r_i, P_i)$ ва $A(r_i', P_i)$ мебошад. Дар ин ишоракунӣ қимати А-В ба намуди зерин тасвир мешавад:

$$\sum\left(\pm\frac{A}{d}\right)+\sum\left(\pm\frac{\theta}{d}\right),$$

ки дар ин ҷо $\left|\frac{\theta}{d}\right| < 1$ мебошад.

Барои $\sum\left(\pm\frac{A}{d}\right)$ таносуби зеринро ба даст меорем:

$$A-\frac{A}{P_1}-\frac{2A}{P_2}-\frac{3A}{P_3}-\cdots-\frac{2A}{P_n}+\frac{2A}{P_1\cdot P_2}+\frac{2A}{P_1\cdot P_3}+\cdots+\frac{2A}{P_1\cdot P_n}+\frac{2^2A}{P_2\cdot P_3}+$$

$$+\frac{2^2A}{P_2\cdot P_4}+\cdots+\frac{2^2A}{P_{n-1}\cdot P_n}-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{2^{k-1}A}{P_1P_2\cdots P_k}=\frac{A}{2}\prod_{2<P\le P_n}\left(1-\frac{2}{P}\right),$$

ки барои формулаи охирон формулаҳои асимптотикии зерин истифода мешаванд. Ҳангоми баҳодиҳии асимптотикии $\sum_{P\le x}\frac{1}{P}$ ва $\prod_{P\le x}\left(1-\frac{1}{P}\right)$ ба туфайли ифодаи Ж. Мерлэн формулаи асимптотикии зерин пайдо мешавад:

$$\frac{c}{\log^2 P_n\, e^{O\left(\frac{1}{\log P_n}\right)}},$$

ки дар ин ҷо $c-$ адади доимии тезҳисобшаванда мебошад. Аз тарафи дигар, нишон додани ифодаи $\sum\left(\pm\frac{\theta}{d}\right)$ ин адади тартиби пастаринест, ки исботи адади

$$\frac{A}{2}\prod_{2<P\le P_n}\left(1-\frac{2}{P}\right)$$

мебошад.

Ж. Адамар ҳолати аввалаи пешниҳоди Ж. Мерселро бе асос ҳисоб намуд. Ӯ ба хотири он, ки дар оянда формулаи мувофиқеро, пайдо мекунад, кӯшиши зиёде намуд. Вале дар ин масъала математики норвегӣ В. Бруно (1885-1997) муваффақ гардид. Азбаски Ж. Адамар кори Ж. Мерлэнро пешниҳод намуд, ба туфайли ин кори Ж. Мерлэн, дар мавриди ёфтани ададҳои сода мавқеи асосиро ишғол намуд. Ба туфайли кори Ж. Адамар кори Ж. Мерлэн мавқеи асосӣ пайдо кард ва ин имкон дод, ки корҳои илмии В.И. Романовский ва Ж. Мерлэн асоснок карда шаванд [133, с. 39].

*Ташаккул ва рушди омӯзиши формулаи асимптотии ададҳои сода дар охири асри XVIII ва аввали асри XIX.* Масъалаи омӯзиши формулаи асимптотии ададҳои сода дар охири асри XVIII ва аввали асри XIX шуруъ шудааст. Яъне, дар ин аср олимон ба ҳалли масъалаи ҷустуҷӯи чунин функсияи содаи $f(x)$, ки қиматаш барои дилхоҳ $x$ –ҳои натуралӣ ҳарчӣ бештар ба функсияи $\pi(x)$ наздик мешавад ва ҳангоми беҳудуд афзудани қимати $x$ таносуби $\frac{\pi(x)}{f(x)}$ ба адади 1 майл мекунад, машғул шуданд.

Проблемаи гузошташударо ба ибораи зерин тасвир кардан мумкин аст, яъне, чунин функсияи аналитикии $f(x)$-ро муайян кардан лозим аст, ки ба он функсияи $\pi(x)$ асимптотикӣ баробар шавад, ё ки он ба функсияи $f(x)$ асимптотикӣ баробарқувва бошад. Аломати баробарии асимптотикиро истифода намуда, таърифи баёншударо бо чунин тарз менависем:

$$\pi(x) \sim f(x).$$

Қайд мекунем, ки аз баробарии асимптотикӣ натиҷа мебарояд, ки функсияи $f(x)$ дар формулаи наздикшавии $\pi(x)$ бояд аъзои асосӣ бошад. Агар дар ин ҳолат аъзои иловагӣ («хатоӣ») дар формулаи наздикшавӣ ба $R(x)$ баробар бошад, он гоҳ чунин навишта метавонем: $\pi(x) = f(x) + R(x)$ ё ин ки $\pi(x) - f(x) = R(x)$, ки дар ин ҷо $\frac{\pi(x)}{f(x)} \to 0$ ҳангоми $x \to \infty$ [17, с. 152-160].

Соли 1808 математики фаронсавӣ А.М. Лежандр (1752-1833) дар асоси таҳқиқи ҷадвали ададҳои сода (ҷадвали ададҳои сода он вақт то адади 400 000 тартиб дода шуда буд) формулаи эмпирикии муҳимро барои ифодаи тахминии функсияи $\pi(x)$ ҳосил намуд. А.М. Лежандр тасдиқ намуд, ки барои қиматҳои калони $x$ функсияи $\pi(x)$ тахминан ба

$$\frac{x}{\ln x - B}$$

баробар мешавад, ки дар ин ҷо $B$ ягон адади доимии ба 1,08366 баробар мебошад.

Математики олмонӣ К.Ф. Гаусс (1777-1855) новобаста аз математики фаронсавӣ А.М. Лежандр шумораи ададҳои содаро пайдарпай мувофиқан барои ҳар як ҳазор адади натуралӣ ҳисоб намуда, фарзияеро баён кард, ки қимати функсияи $\pi(x)$ аз қимати интеграли зерин

$$\int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{ln\, t}$$

кам фарқ мекунад.

Ва ин интеграл, асосан бо «интеграли логарифмӣ» иваз карда мешавад

$$Lix = \lim_{\eta \to +0} \left( \int\limits_{0}^{1-\eta} + \int\limits_{1-\eta}^{x} \right) \frac{dt}{\ln t},$$

ки он бо доимии $Li2 = 1{,}04$ фарқ мекунад.

Дар асоси қоидаи пешниҳодкардаи математики фаронсавӣ Г.Ф. Лопитал (1661-1704) ба осонӣ нишон додан мумкин аст, ки

$$\lim_{x \to \infty} \left( \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{\ln t} : \frac{x}{\ln x} \right) = 1$$

мешавад.

Дар ҳақиқат,

$$\lim_{x \to \infty} \left( \int\limits_{2}^{x} \frac{dt}{\ln t} : \frac{x}{\ln x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x}{\ln x} : \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{\ln x}{\ln x - 1} \right) = 1$$

мебошад.

Аз баробарии исботгардида натиҷа мебарояд, ки фарзияҳои А.М. Лежандр ва К.Ф. Гаусс ба баҳодиҳии якхелаи асимптотикии функсияи $\pi(x)$, яъне

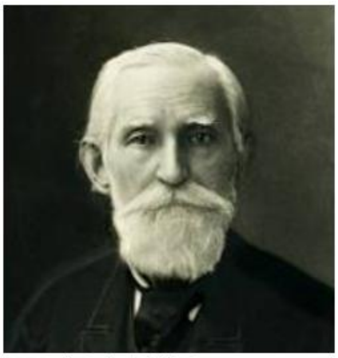
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1 \text{ ё } \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{dt}{\ln t}} = 1$$

ё мувофиқан ба

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \text{ ё } \quad \pi(x) \sim \int_{2}^{x} \frac{dt}{\ln t}$$

оварда мерасонад.

Ин формулаҳои асимптотикӣ қонуни асимптотикии тақсимоти ададҳои содаро ифода менамоянд. Вале, барои ба таври назариявӣ шарҳ додани ин қонун А.М. Лежандр ва К.Ф. Гаусс коре карда натавонистанд. Баъди Евклид, аввалин касе, ки дар масъалаи мушкили тақсимоти ададҳои сода бо ёрии таҳқиқоти назариявӣ қадами ҳалкунанда гузошт, математики машҳури рус П.Л. Чебишев (1821-1894) мебошад. Натиҷаҳои доир ба ин проблема бадастовардаи ӯ дар ду асараш оид ба ададҳои натуралӣ «Оид ба муайянкунии шумораи ададҳои содаи аз бузургии додашуда зиёднабуда» (1849) ва «Оид ба ададҳои сода» (1852) тасвир шудаанд [124, 125].



П. Л. Чебишев
(1821-1894)

1. Дар асари якуми худ П.Л. Чебишев аз дзета функсияи Л. Эйлер (1707-1783), яъне $\zeta(s)$ барои дилхоҳ ададҳои ҳақиқии s истифода бурда, натиҷаи асосии зеринро ҳосил намуд: «*агар* $n > 0$ *адади бениҳоят калон ва* $\alpha > 0$ *адади бениҳоят хурд бошанд, он гоҳ адади бениҳоят калони x мавҷуд аст, ки барои онҳо нобаробарии*

$$\pi(x) > \int_{2}^{x} \frac{dt}{\ln t} - \frac{\alpha x}{\ln^n x}$$

*иҷро мешавад ва инчунин адади калони x (мумкин аз пештара фарққунанда) мавҷуд аст, ки барои онҳо нобаробарии зерин низ*

$$\pi(x) < \int_{2}^{x} \frac{dt}{\ln t} + \frac{\alpha x}{\ln^n x}$$

*иҷро гардад»* [71, с. 257-263].

2. Бо ёрии теоремаи нишондодааш П.Л. Чебишев таҳқиқоти худро идома дода, нишон медиҳад, ки баробарии

$$B(x) = \ln x - \frac{x}{\pi(x)}$$

ҳангоми $x \to \infty$ ҳудуди аз 1 фарққунанда надорад.

Ва П.Л. Чебишев доир ба формулаи эмпирикии А.М. Лежандр (1752-1833) тасдиқоти зеринро исбот намуд, яъне: «формулаи А.М. Лежандр ҳангоми $x \to \infty$ формулаи аниқ набуда, доимии мувофиқ ҳангоми $B$=1 будан аст» [124, с. 173-190]. Ин тасдиқотро П.Л. Чебишев аз баробарии

$$\lim_{x \to \infty} \left\{ \ln x - \frac{x}{\pi(x)} \right\} = B,$$

ки аз формулаи эмпирикии А.М. Лежандр бармеояд, ҳосил кардааст.

3. П.Л. Чебишев муайян кард, ки наздикшавии тақрибии эмпирикии формулаи А.М. Лежандр ба функсияи $\pi(x)$ ғайриқаноатбахш аст. Ва ҳамчунин ӯ нишон дод, ки агар ҳудуди

$$\pi(x) : \frac{x}{\ln x}$$

ҳангоми $x \to \infty$ мавҷуд бошад, бояд он ба 1 баробар шавад [97, с. 378-382].

Акнун натиҷаҳои асосии асари дуюми П.Л. Чебишевро доир ба тақсимоти асимптотии ададҳои сода дида мебароем:

Сабаби асосии навиштани асари дуюми П.Л. Чебишев постулати Р. Бертран (1872-1970) гардид. Математики машҳури фаронсавӣ Р. Бертран дар таҳқиқоти худ доир ба назарияи гурӯҳҳо ба зарурати исбот намудани фарзияи эмпирикии зерин, ки: «дар байни ададҳои натуралии $n(n > 3)$ ва $2n - 2$ ақалан як адади сода мавҷуд аст» [39], рӯ ба рӯ шудааст. Ҳамаи кӯшишҳои Р. Бертран ва дигар математикҳо дар исботи ин фарзия бе натиҷа монданд.

Соли 1852 П. Л. Чебишев дар китоби дуюми худ постулати Р. Бертранро исбот намуд (ҳоло исбот шудааст, ки барои адади натуралии $n > 5$ байни $p$ ва $2p$ ҳадди ақал ду адади сода вуҷуд дорад). Вале бо ҳамин арзиши корҳои муҳимми П.Л. Чебишев ба анҷом намерасад. Арзиши асосии асари П.Л. Чебишев «Оид ба ададҳои сода» аз усулҳои элементарӣ ва якҷоя бо он усулҳои қавӣ, ки барои исботи баҳодиҳии функсияи $\pi(x)$ ва инчунин дигар функсияҳои додашуда, истифода бурда шудаанд, ба ҳисоб мераванд. Аз баҳодиҳии П.Л. Чебишев натиҷа мебарояд, ки барои ададҳои калони $x$ баробарии

$$0{,}92129 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} < 1{,}10555$$

иҷро мегардад ва аз ин рӯ, мо онҳоро

$$0{,}92129\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1{,}10555\frac{x}{\ln x},$$

нобаробариҳои П.Л. Чебишев меномем.

Аз нобаробариҳои П.Л. Чебишев барои $\pi(x)$ баҳодиҳии афзоиши $n$-уми адади сода $p_n$ бармеояд, яъне: бигузор $p_n$ $-$ адади $n$-уми сода ва $n \geq 2$ бошад, он гоҳ нобаробарии зерин ҷой дорад [124, 125]

$$c_1 \cdot n\ \ln n < p_n < C_1 \cdot n\ \ln n.$$

Натиҷаҳои бузургтарини П.Л. Чебишев дар масъалаи тақсимоти ададҳои сода дар байни ҳамзамононаш таассуроти калон гузошт. Дар ин бора, суханони математики машҳури англис Ҷ.Ҷ. Силвестр (1814-1897) бараъло шаҳодат медиҳад, ки дар соли 1881 чунин гуфтааст: «барои он, ки тарақиёти минбаъдаи назарияи ададҳоро мунтазир шавем, бояд ягон нафаре таваллуд шавад, ки аз П.Л. Чебишев беҳтар буда, бо нуқтасанҷӣ ва боақлии худ аз вай болотар бошад, зеро П.Л. Чебишев бо ин хислатҳои боақлонааш аз одами муқаррарӣ фарқ мекард» [71, с. 272-274]. Инчунин, суханони математики машҳури олмонӣ Эдуард Ландауро (1887-1938) овардан мумкин аст, ки дар кори махсуси худ оид ба тақсимоти ададҳои сода бахшида шудааст, соли 1909 навишта буд: «баъди Евклид, аввалин касе, ки роҳи дурустро дар ҳалли проблемаи ададҳои сода тай намуд ва натиҷаҳои муҳимро ба даст овард П.Л. Чебишев мебошад» [71, с. 272-274].

Вале дастовардҳои П.Л. Чебишев барои қадами охирин дар исботи қонуни асимптотикии тақсимоти ададҳои сода ва махсусан барои исботи мавҷудияти ҳудуди

$$\lim_{x\to\infty}\left(\pi(x) : \frac{x}{\ln x}\right),$$

кифоя набуданд.

Агарчанде, ки баъди П.Л. Чебишев боз сарҳадҳои нисбатан аниқ (масалан, Ҷ.Ҷ. Силвестер барои ададҳои кифоя калони $x$ дурустии нобаробарии

$$0{,}95695 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} < 1{,}04423 - \text{ро}$$

муайян намуд) барои таносуби

$$\pi(x) : \frac{x}{\ln x}$$

ҳангоми кифоя калон будани $x$ ёфта шуданд, вале кӯшишҳои бо ин роҳ исбот намудани қонуни асимптотикӣ бенатиҷа монданд [124, с. 173-190].

Маълум гашт, ки калиди ҳалли ин проблема дар таҳқиқоти математики машҳури олмонӣ Б. Риман (1826-1866) ҷой доштааст. Вай соли 1859 дар асари худ гипотезаеро пешниҳод кард, ки барои ҳамаи ҳолатҳои нотривалӣ $\zeta(s)$ дар хати рости $\sigma = \frac{1}{2}$ мехобад. Ин гипотеза бо номи гипотезаи Риман маълум буда, то ҳол исбот ё инкор нашудааст. Вале аз дурустии ин гипотеза исботи якчанд теоремаҳои аҷиб оид ба ададҳои сода ба вуҷуд омада, барои ҳосил намудани натиҷаҳои амиқ доир ба тақсимоти ададҳои сода бо ёрии таҳқиқи дзетта-функсияи $\zeta(s)$ барои қиматҳои тағйирёбандаи комплексии $s = \sigma + \tau i$ шароит фароҳам овард. (П.Л. Чебишев дар давраи худ ин функсияро барои тағйирёбандаҳои ҳақиқӣ истифода бурдааст). Б. Риман бо ёрии усули худ ягон натиҷаи арифметикӣ ба даст наовард, вале аз усули Б. Риман математики фронсавӣ Ж. Адамар (1865–1963) ва математики белгиягӣ *В.П.* Шарл (1866–1962) истифода намуда, соли 1896 новобаста аз ҳамдигар мавҷудияти ҳудудро барои $\pi(x) : \frac{x}{\ln x}$ исбот карданд [33].

То давраҳои наздик ҳамаи исботҳои қонуни асимптотикӣ бештар ё камтару амиқтар ба омӯзиши функсияи $\zeta(s)$ асос ёфта буданд [107].

«Танҳо соли 1949 кӯшиши исботи элементарии қонуни асимптотикӣ натиҷаи шоён дод. Ва ин усули элементариро математики норвегӣ А. Селберг (1917-2007) ва математики венгерӣ П. Эрдеш (1913-1996) эҷод карданд. Вале исботи нисбатан содаи онро математикони шуравӣ А.Г. Постников (1921-1995) ва Н.П. Романов (1907-1972) пешниҳод намуданд» [77].

Қайд мекунем, ки аз қонуни асимптотикии тақсимоти ададҳои сода бо осонӣ баҳодиҳии асимптотикиро барои адади содаи $n$-ум $p_n$ баровардан мумкин аст, яъне

$$p_n \sim n \ln n.$$

Баъди кашф гардидани қонуни асимптотикии тақсимоти ададҳои сода, масъалаи баҳодиҳии аъзои иловагии он, яъне фарқи зерин

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{lnt}$$

ҳам аз рӯи қимати мутлақ ва ҳам аз рӯи аломати худ актуалӣ гардид.

Агар ба ҷадвали қиматҳои $\pi(x)$ ва $Lix$ назар афканем, мебинем, ки барои ҳамаи қиматҳои овардашуда $\pi(x) < Li\,x$ мешавад. То соли 1914 олимон барои ҳамаи $x$-ҳо ба дуруст будани нобаробарии $\pi(x) < Li\,x$ боварӣ доштанд. Аммо соли 1914 математики англис Ҷ.И. Литлвуд (1885-1977) нишон дод, ки ҳангоми кифоя васеъ кардани ҷадвали қиматҳои $\pi(x)$ ва $Lix$ дар охир чунин қимати $x$ вомехӯрад, ки барои он $\pi(x) > Li\,x$ мешавад (ин қимат то ҳол маълум нест, аммо математики Африқои Ҷанубӣ С. Скюз муайян кард, ки он камтар аз $10^{10^{10^{10^3}}}$ аст), яъне фарқи

$$\pi(x) - Li\,x$$

дар порчаи аз $x$=2 то $x \to \infty$ аломаташро беҳисоб иваз мекунад (ҷадвали 12) [38].

| $x$ | $\pi(x)$ | $Li\ x$ |
|---:|---:|---:|
| 1 000 | 168 | 178 |
| 10 000 | 1 229 | 1 246 |
| 50 000 | 5 133 | 5 167 |
| 100 000 | 9 592 | 9 630 |
| 500 000 | 41 538 | 41 606 |
| 1 000 000 | 78 498 | 78 628 |
| 2 000 000 | 148 933 | 149 055 |
| 5 000 000 | 348 513 | 348 638 |
| 10 000 000 | 664 579 | 664 918 |
| 20 000 000 | 1 270 607 | 1 270 905 |
| 90 000 000 | 5 216 954 | 5 217 810 |
| 100 000 000 | 5 761 455 | 5 762 209 |
| 1 000 000 000 | 50 847 534 | 50 849 235 |

Ҷадвали 12.


И. М. Виноградов
(14.09.1891-20.03.1983)

Бо ёрии далели зикршуда ифодашавии (фолмулировкаи) ниҳоии лаппиши функсияи $\pi(x)$ дар атрофи $Lix$, ки дар теоремаи асосии П.Л. Чебишев сухан мерафт, таҳқиқ карда шуд.

Ба ҳалли проблемаи ба кадом дараҷаи аниқ интеграли $\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$, функсияи $\pi(x)$-ро муаррифӣ мекунад, аввалин маротиба П.Л. Чебишев ва инчунин Ж. Адамар, Валле-Пуссен (1866-1962), Г.Х. Харди (1877-1947), Ҷ.И. Литлвуд ва дигар олимон машғул шуданд. Натиҷаҳои беҳтарин дар ин самт дар асоси истифодаи усули баҳодиҳии суммаҳои тригонометрии И.М. Виноградов (1891-1983) [20, 21, 22, 23, 24, 25] ба математики шуравӣ Н.Г. Чудаков (1904-1986) (соли 1936), математики англис Е. Титчмарш (1899-1963), математики шуравӣ Н.М. Коробов (1917-2004) таалуқ доранд. Соли 1958 худи И.М. Виноградов исбот кард, ки дар баробарии

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + R(x)$$

аъзои иловагии он бо нобаробарии $|R(x)| < c_1 \cdot x \cdot e^{-c_2(\ln x)^{\mu}}$ маҳдуд мешавад, ки дар ин ҷо $c_1$ ва $c_2$ – доимиҳои мусбат ва $\mu = \frac{3}{5} + \varepsilon$ мебошад.

Усули тригонометрии И.М. Винаградовро Н.Г. Чудаков истифода намуда, соли 1936 тавонист сарҳади ҳудудҳоеро, ки ақалан як адади содаро дар бар мегирад, ба таври назаррас кам намояд. То ин вақт, аниқтараш соли 1993 математикӣ олмони Х. Хейлброн (1908-1975) тасдиқ кард, ки, пайдарпаии

$$1^{250}, 2^{250}, 3^{250}, \cdots, n^{250}, (n+1)^{250}, \cdots,$$

аз ягон адади $n = n_0$ сар карда, дар байни ду ададҳои ҳамсоя ақалан як адади сода мехобад. Ва Н.Г. Чудаков тавонист ин пайдарпайиро зичтар гардонад, яъне ӯ пайдарпайии Х. Хейлбронро бо пайдарпайии

$$1^4, 2^4, 3^4, \cdots, n^4, (n+1)^4, \cdots,$$

иваз намуд, ки хосиятҳояш бо хосиятҳои пайдарпайии Х. Хейлброн монанд мебошад.

Соли 1937 ба математики англис А. Е. Ингам муяссар гашт, ки дараҷаи чоруми пайдарпайии Н.Г. Чудаковро бо дараҷаи кубӣ иваз намояд ва порчаро нисбатан аниқ гардонад. Аз натиҷаҳои А.Е. Ингам бармеояд, ки шумораи ададҳои сода дар байни $n^3$ ва $(n+1)^3$ якҷоя бо $n$ ба беохирӣ майл мекунанд [38].

Проблемаи тақсимоти ададҳои сода дар қатори ададҳои натуралӣ минбаъд дар масъалаи тақсимоти ададҳои сода дар прогрессияи арифметикӣ ва дигар пайдарпайиҳои ададӣ тараққӣ меёбад.

Аллакай соли 1788 А.М. Лежандр фарзияе баён намуд, ки дар ҳар прогрессияи арифметикии

$$l, l+k, l+2k, \cdots$$

бо аъзои умумии $kx + l$, ки дар ин ҷо $k$ ва $l$ ададҳои байни ҳам сода ва $x$=0,1,2,... мебошанд, маҷмуи беохири ададҳои содаро дар бар мегирад (бо суханҳои дигар ҳангоми шартҳои додашуда нисбат ба $k$, $x$ ва $l$ бисёр ададҳои содаи намуди $kx + l$ мавҷуданд) [66].

«Танҳо соли 1837 математики олмонӣ Густав Лежен Дирихле (1805-1859) тавонист, ки ин теоремаро исбот кунад. Исботи вай барои ҳолати умумӣ нисбатан мушкил буд. Исботи содаи он соли 1949, аз тарафи А. Селберг ва баъдтар аз тарафи математики шуравӣ А.О. Гелфонд (1906-1968) баррасӣ гардид. Исботи нисбатан содаашро математики швейтсарӣ Е. Трост баён намуд» [110, с. 42-46].

Бояд қайд намуд, ки аллакай чанд сол пеш проблема оид ба хурдтарин адади сода дар прогрессияи арифметикии (1) гузошта шуда буд. Ин проблемаро математики машҳури ленинградӣ Ю.В. Линник (1915-1972) бо дараҷаи аъло ҳал намуд. Соли 1944 ӯ исбот кард, ки чунин прогрессия, яъне прогрессияи (1) (ҳангоми $0 < l < k$) адади содаи $p < k^c$ −ро, ки дар ин ҷо $c-$ доимии мутлақи аз $k$ новобаста аст, дар бар мегирад.

Аз ҷойгиршавии ададҳои сода дар қатори ададҳои натуралӣ (дар байни 10 адади аввали натуралӣ 4 адади сода, дар байни 100 адади аввали натуралӣ 25 адади сода ва дар байни 1000 адади аввал бошад, 168 адади сода мавҷуд аст) бармеояд, ки миқдори ададҳои сода торафт кам мешавад. Ва ин дар маҷмуъ табиист, чунки агар ҳар қадар шумораи ададҳои натуралӣ зиёд бошад, ҳамон қадар тақсимкунандагони эҳтимолии он зиёданд ва эҳтимоли сода будани адад ҳамон қадар камтар мешавад.

Аммо, ин мубодила бо кадом суръат кам мешавад. Чи тавр формулаи асимптотикии ададҳои содаи аз адади додашуда хурдбуда тартиб дода мешавад ва адади $n$ −уми содаи $p_n$ тахминан ба чанд баробар аст?

Ба ин савол дар охири асри XIX ба шарофати кӯшишҳои бисёре аз математикҳо, ба монанди Л. Эйлер, Г.Л. Дирихле, П.Л. Чебишев, Б. Риман, Ж. Адамар ва В.П. Шарл ҷавоб дода шудааст. Яъне, ин проблема дар шакли теоремаи зерин исбот карда шуд.

**Теорема.** *Қонуни асимптотии тақсимоти ададҳои сода тахминан баробар аст ба*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \to \infty).$$

Агар ин теоремаро бо тоаври дигар тасвир кунем, чунин мешавад: «нисбати миқдори ададҳои содаи аз N калон набуда бо N, яъне касри $\frac{\pi(N)}{N}$ ба касри $\frac{1}{\ln N}$ якхел рафтор мекунад, ки дар ин ҷо $\pi(x)$ шумораи ададҳои содаи аз $x$ зиёднабударо ифода мекунад. Ин теоремаро аксар вақт ба тарзи одӣ «теоремаи ададҳои сода» меноманд» [34, с. 79-83].

*Аз таърихи омӯзиши муаммои ададҳои содаи дугоник.* Дар байни муаммоҳои аддитивӣ бо ададҳои сода, муаммои ададҳои содаи дугоникҳо махсусан машҳур аст. Ба ғайр аз 2, ҳама ададҳои дигари сода тоқ ҳастанд ва хурдтарин фарқияти имконпазир байни онҳо 2 аст:

**«Таърифи 1** (Линник). Ададҳои содае, ки фарқашон ба 2 баробар аст, ададҳои содаи дугоник номида мешаванд» [18, с. 362].

«Масалан, дар байни 50 адади натуралӣ 6 ҷуфт ададҳои дугоники аввала мавҷуданд, аз ҷумла: 3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31 ва 41, 43. Тахмин меравад, ки шумораи бепоёни чунин ҷуфтҳо вуҷуд дорад, аммо ин фарзия то ҳол исбот ва рад нашудааст. Ададҳои содаи дугоникро аз қатори ададҳои натуралӣ ба тоаври муқаррарӣ ҳамчун «Ғалбери Эратосфен» ҷудо кардан мумкин аст» [18, с. 362]:

**«Теоремаи 1** (Линник). Бигзор $p_1 = 2, p_2, \cdots, p_r$ ҳама ададҳои содаи $\leq \sqrt{\mathrm{N}+2}$ $(\mathrm{N} \geq 7)$ бошанд. Агар дар қатори ададҳои натуралӣ ҳамаи ададҳои n-ро ба $\mathrm{p}_1$, ба $\mathrm{p}_2, \cdots,$ ба $\mathrm{p}_\mathrm{r}$ тақсим кунем ва барои ҳамаи ададҳои n, ҳам чунин $\mathrm{n}+2$ ақаллан яке аз ададҳои $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \cdots, \mathrm{p}_\mathrm{r}$ тақсимшаванда бошад, он гоҳ дар мавриди пай дар пай хат задан ададҳои боқимонда маҷмуи ададҳои содаи $\mathrm{p}$ –ро ташкил медиҳанд, ки $\mathrm{p}+2$ низ адади сода ва $\sqrt{\mathrm{N}+2} < \mathrm{p} \leq \mathrm{N}$ мешавад» [18, с. 362].

*Исбот.* Адади 1 хат зада мешавад, зеро $1 + 2 = 3$ ба 3 тақсим мешавад. Ҳама ададҳои натуралии дигар $n \leq \sqrt{N+2}$ низ хат кашида мешаванд, зеро ҳар яки онҳо ба яке аз ададҳои $p_1, p_2, \cdots, p_r$ тақсим мешаванд.

Аз ададҳои $n$, ки дар байни $\sqrt{N+2}$ ва $N$, $\left(\sqrt{N+2} < n \leq N\right)$ ҷойгиранд, ҳамаи $n$ ададҳое, ки $n$ ё $n+2$ таркибӣ бошанд, хат зада мешаванд, он вақт $n$ ё $n+2$ ё ҳардуи ин ададҳо ба камиашон ба яке аз ададҳои $p_1, p_2, \cdots, p_r$ тақсим мешаванд. Ададҳои $p$ тавре, ки $p+2$ низ як адади сода аст ва $\sqrt{N+2} < p \leq N$ хат зада намешавад, зеро дар ин ҳолат $p$ ва $p+2$ ба $p_1, p_2, \cdots, p_r$ тақсим намешаванд, зеро ки онҳо аз $p$ камтаранд.

Ҳамин тариқ, мо алгоритме дорем, ки ба мо имкон медиҳад то ҳамаи ҷуфтҳои ададҳои содаи дугоникҳои $p, p+2$, ки дар он $\sqrt{N+2} < p \leq N$ мебошад, пайдо кунем. Бо илова кардани ҷуфтҳои дугоникҳои $p, p+2$, ки дар он $p \leq \sqrt{N+2}$ аст, мо ҳамаи дугоникҳои $p, p+2$-ро пайдо мекунем, ки дар он $p \leq N$ аст.

Ҳамин тариқ, ин алгоритм имкон медиҳад, ки қиматҳои функсияи $B(N)$, ки шумораи ададҳои содаи $p \leq N$ –ро ифода мекунад ва то $p+2$ адади сода мебошад, ҳисоб карда шавад Масъалаҳое, ки ба ададҳои содаи дугоникҳо вобастагӣ дорад ва баробари зиёд шудани N, B(N) ба таври номуайян меафзояд, исбот шудааст: «барои ҳосилкунии ададҳои содаи $p \leq N$ як алгоритми шабеҳро сохтан мумкин аст, ки дар он $p' = 2N - p$ низ сода бошад, яъне барои ёфтани ҷуфтҳои ададҳои сода $((p, p'))$, ки дар масъалаи (проблемаи) Голдбах-Эйлер баррасӣ мешавад, суммаи он ба ададҳои ҷуфти додашудаи $2N$ баробар аст» [18, с. 362]:

*«Теоремаи* $1'$. Бигзор $p_2 = 3 < p_3 < \cdots < p_r \leq \sqrt{N} < p_{r+1} < \cdots < p_s \leq \sqrt{2N}$ ва ҳамаи ададҳои тоқ на бештар аз $\sqrt{2N}$ бошанд» [18, с. 363].

«Агар аз байни ададҳои натуралии *n,* ки $3 \leq n \leq N$ *ме*бошад, мо ҳамаи ададҳои ақаллан ба яке аз ададҳои $p_1, p_2, \cdots, p_r$ тақсимшаванда ва инчунин ҳамаи ададҳои $n$ –ро тавре хат занем, ки $2N - n$ ақаллан ба яке аз ададҳои $p_1, p_2, \cdots, p_r, \cdots p_s$ тақсим шавад, пас маҷмуи ададҳои боқимонда ададҳои содаи $p-$ро ташкил медиҳанд, ки $p' = 2N - p$ низ сода буда, $\sqrt{N} < p \leq N$ мебошад.

Ба ададҳои боқимонда тавре, ки $p' = 2N - p$ сода бошад, бо илова кардани ададҳои содаи $p \leq \sqrt{N}$ мо ҳамаи ҷуфтҳои содаи $p$ ва $p'$ −ро ҳосил мекунем, ки шарти $p + p' = 2N, (3 \leq p \leq N)$ −ро қонеъ мекунанд. Дар баробари ҷуфтҳо $((p, p'))$ инчунин ҷуфтҳои $\big((p, p')\big)$ − ро гирифта, мо ҳама роҳҳои ҳалли муодилаи Голдбах-Эйлерро пайдо мекунем:

$$x + y = 2N,$$

ки дар он ҳарду номаълум танҳо қиматҳоеро мегиранд, ки ададҳои сода мебошанд.

Миқдори ҳалли муодилаи болоро дар ададҳои сода, яъне шумораи ҷуфтҳои ададҳои содаи $\big((p, p')\big)$ − ро тавре ки $p + p' = 2N$ бошад, бо $P(2N)$ ишора кунем, он гоҳ муодилаи Голдбах-Эйлер аз исбот кардани нобаробарии $P(2N) > 0$ барои ҳамаи ҳолатҳои $N \geq 3$ иборат мешавад» [18, с. 363-365].

*Мисол.* Ҳамаи ҷуфти ададҳои содаи $((p, p'))$-ро ёбед, ки $\mathrm{p} + \mathrm{p}' = 232$ шавад. Ададҳои содаи тоқе, ки аз $\sqrt{116}$ хурд ё ки баробаранд, ба ададҳои 3, 5, 7 баробаранд, вале барои ададҳои аз адади $\sqrt{232}$ хурд ё ки баробар ададҳои содаи 11 ва 13-ро илова мекунем. Дар маҷмуи ададҳои 3,5,7,9, ... ,115 ҳамаи ададҳои *n*-и ба 3 тақсимшаванда ва адади *n*-ро, ки $232 - n \equiv 0(mod 3)$, яъне $n \equiv 1(mod 3)$ аст, мепартоем (хат мезанем). Ададҳои тоқи $n \equiv 2(mod 3)$, яъне ададҳои 5, 11, 17, 23, 29, 53, 41, 47, 53, 59, 65, 71, 77, 83, 89, 95, 101, 107, 113 боқӣ мемонанд. Аз ададҳои боқимонда он адаҳои *n*-еро, ки барояшон $n \equiv 0(mod 5)$ ва онҳоеро, ки барояшон $232 - n \equiv 0(mod 5)$, яъне $n \equiv 2(mod 5)$ аст, мепартоем. Баъди ин ададҳои 11, 23, 29, 41, 53, 59, 71, 83, 89, 101, 113 боқӣ мемонанд. Баъд ададҳои намуди $n \equiv 0(mod 7)$ ва инчунин намуди $232 - n \equiv 0(mod 7)$, яъне $n \equiv 1(mod 7)$-ро мепартоем. Баъди ин ададҳои 11, 23, 41, 53, 59, 83, 89, 101 боқӣ мемонад. Инчунин ададҳои *n*-ро ҳамин тавр, ки $232 - n \equiv 0(mod 11)$, яъне

$n \equiv 1(mod 11)$ ва ададҳои $n$-ро ҳамин тавр, ки $232 - n \equiv 0(mod 13)$, яъне $n \equiv 11(mod 13)$ мебошанд, мепартоем.

Дар натиҷа ададҳои 41, 53, 59, 83, 101 боқӣ мемонанд. Ба онҳо ададҳои содаи 3 ва 5-и аз адади $\sqrt{116}$ хурдро, ки барояшон 232-3=229 ва 232-5=227 низ ададҳои сода мебошанд, илова мекунем. Тасвири адади 232 дар намуди суммаи ду адади сода намуди зеринро мегирад:

«$232 = 3 + 229 = 5 + 227 = 41 + 191 = 53 + 173 = 83 + 149 = 10 + 131$ ва инчунин 7 тасвири ба воситаи тағйирёбанда навиштани ҷамъшаванда ҷой дорад. Муодилаи $x + y = 232$ 14 ҳалли бо ададҳои содаро дорад, яъне $\mathrm{P}(232) = 14$» [18, с. 363-365].

Ҳамин тавр: «имкон дорад, ки ғалбери аналогии ёфтани ададҳои содаи ($(p, p')$) монанд, чуноне ки $\mathrm{p}' - \mathrm{p} = 2$ ва ҳалли муодилаи Голдбах-Эйлер $\mathrm{p}' - \mathrm{p} = 2N$, мумкин аст барои дигар масъалаҳои аддитивӣ бо ададҳои сода сохта шаванд. Ғалбери ба ин намудҳо монандро ғалбери дукаратаи Эратосфенӣ (ду «ҷафскунӣ» барои ҳар яке аз ададҳои содаи $p_i \leq \sqrt{N}$) меноманд. Чунин ғалбер бори аввал аз тарафи математики фаронсавӣ М. Мерсен (1588-1648) сохта шудааст» [18, с. 363-365].

Ба монанди он, ки «Ғалбери Эратосфен»–и одӣ дар намуди формулаи

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = [x] - \sum_{p_i|M}\left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{p_ip_j|M}\left[\frac{x}{p_ip_j}\right] - $$
$$- \sum_{p_ip_jp_k|M}\left[\frac{x}{p_ip_jp_k}\right] + \cdots \qquad (1)$$

ифода карда мешавад, мумкин аст инчунин барои ғалбери дукаратаи Эратосфенӣ формулаи ифодакунии функсияи B(N) ба P(2N)-ро дар намуди маълум ифода намоем. Дар қисми чапи формулаи (1)-и дар боло овардашуда бузургии намуди $\left[\frac{N}{k}\right]$ шумораи ададҳои аз N калон ва ба он баробар ва ба k тақсимшавандаро ифода мекунад, ки дар ин ҷо k ба ҳосили зарби махраҷҳои содаи аз ададҳои содаи $p_1, p_2, \cdots, p_r \leq \sqrt{N}$

иборатбуда баробар аст. Бузургии $\left[\frac{N}{k}\right]$ аз бузургии $\frac{N}{k}$ на зиёда аз 1 фарқ мекунад. Дар ҳолати ғалбери дукаратаи Эратосфенӣ барои ҳар як $k$-и намуди $k = p_{i_1} \cdots p_{i_s}$ дар қисми чап ба $2^s$ бузургие, ки аз $\frac{N}{k}$ ҳам на зиёда аз 1 фарқ мекунад. Истифодаи формулаи (1)-и дар боло овардашуда барои муайян кардани тартиби афзоиши $\pi(N)$ нишонаи додашуда он душвории асосиеро ба вуҷуд меорад, ки ҳангоми иваз намудани ҳар як ҷамъшаванда ба $\frac{x}{k}$ хатоӣ калон набуда, аз 1 калон намешавад. Адади умумии ҷамъшавандаҳо дар сумма, чи тавре ки бо осонӣ мебинем ба $2^r = 2^{\pi(\sqrt{N})}$ баробар шуда, дар худ адади ниҳоят калонро, ки аз худи $\pi(x)$ бисёр калон аст, таҷассум менамояд.

Боз ҳам душвориҳои калон ҳангоми истифодаи формулаҳои монанд барои $B(N)$ ё ки $P(2N)$ вомехӯранд. Масалан, дар формула барои $B(N)$ адади ҷамъшавандаҳо ба $1 + 2C_r^1 + 2^2C_r^2 + \cdots + 2^{r-1}C_r^{r-1} = 3^r - 2^r, r = \pi\left(\sqrt{N+2}\right)$ баробар аст. Соли 1919 математики норвегӣ В. Брун (1885-1978) усули машҳуреро кор кард, ки имконият медиҳад ғалбери дукаратаи Эратосфениро барои баҳодиҳии функсияҳои намуди $B(N)$ ва $P(2N)$ истифода намоем. Пеш аз ҳама, Виго Брун ин функсияҳоро бо функсияҳои $B(N, N^{\frac{1}{a}})$ ва $P\left(2N, \left(2N^{\frac{1}{a}}\right)\right)$ иваз намуд. Функсияи $B(N, N^{\frac{1}{a}})$ шумораи ададҳои $n \leq N-$ ро ҳамон тавр муайян мекунад, ки ҳамаи тақсимкунандаҳои содаи $n$ ва $n+2$ аз $N^{\frac{1}{a}}$ калон мебошанд. Функсияи $P\left(2N, \left(2N^{\frac{1}{a}}\right)\right)$ ба шумораи ададҳои $n \leq 2N$ ҳамон тавре баробар мешавад, ки тақсимкунандаҳои содаи $n$ ва $2N - n$ аз $(2N)^{\frac{1}{a}}$ калон бошанд. Барои чунин функсияҳо ҳангоми $\alpha = 10$ будан В. Брун ҳалли дукарата (ҳалли В. Брун)-ро сохт, ки бузургиҳои $P(N, N^{\frac{1}{10}})$ ва $P\left(2N, (2N)^{\frac{1}{10}}\right)$ дар байни ду суммаҳо бо адади начандон калони ҷамъшавандаҳо охирин дониста шуданд. Ин усулро В. Брун истифода намуда, исбот кард, ки $B(N, N^{\frac{1}{10}})$ ва $P\left(2N, (2N)^{\frac{1}{10}}\right)$ ҳангоми афзоиши $N$ беҳудуд меафзоянд. В. Брун исбот кард, ки $B(N, N^{\frac{1}{10}})$ ва $P(2N, (2N)^{\frac{1}{10}})$ баробари зиёд шудани N ба таври номуайян зиёд мешаванд:

«Агар адади $n \leq 2N$ чунин бошад, ки ҳамаи тақсимкунандаҳои содаи n аз $(2N)^{\frac{1}{10}}$ зиёд бошанд, он гоҳ n аз ҳадди аксар нуҳ зарбшавандаи сода иборат аст. Агар дар айни замон адади $2N - n$ дорои тамоми зарбшавандаҳои содаи аз $(2N)^{\frac{1}{10}}$ зиёд бошад, $n' - 2N - n$ на зиёда аз нуҳ зарбшавандаи сода иборат аст. Ҳамин тавр, барои ба даст овардани $P(2N, (2N)^{\frac{1}{10}}) \to \infty$ В. Брун исбот кард, ки ҳар як адади ҷуфт ба қадри кифоя калони $2N$-ро дар шакли $2N = n + n'$ ифода кардан мумкин аст, ки дар он ҳар як ҷамъшавандаи $n$ ва $n'$ на зиёда аз нуҳ зарбшавандаи сода иборат аст» [18]. Ба ҳамин тариқ, аз $B(N\,, N^{\frac{1}{10}})$ бармеояд, ки маҷмуи беохири ададҳои $n$ вуҷуд дорад, ки ҳам $n$ ва ҳам $n' = n + 2$ на бештар аз нуҳ зарбшавандаи сода иборат мебошанд.

Як қатор такмилдиҳии усули В. Брун имкон дод, ки шумораи зарбшавандаҳои дар $n$ ва $n'$ (дар проблемаи Голдбах-Эйлер $2N = n + n'$ ва дар проблемаи дугоникҳо $n' - n = 2$) мавҷудбуда то чор адад кам карда шавад. (А. А. Бухштаб (1905-1990), 1940) [15, с. 375-387].

Боз як ҳалли дигаре, ки аз ҳалли В. Брун хеле фарқ мекунад, аз ҷониби А. Селберг (1917-2007) пешниҳод шудааст [74].

Бо истифода аз усулҳои гуногуни ғалбер, ки аз ҷониби В. Брун, А.А. Бухштаб, А. Селберг, Г. Кун (1925-2014) таҳия шудаанд, дар ниҳоят имконпазир гардид, ки шумораи зарбшавандаҳои содаи дар $n$ то ду ва дар $n'$ ба се кам кардан шавад (математики чинӣ Ван Юан, Б.В. Левин 1958).

Соли 1948 математики венгер А. Рени (1921-1970) теоремаи зеринро исбот кард:

*«Теоремаи 2 (А. Рени).* $l$ доимӣ вуҷуд дорад, ки ҳар як адади ба қадри кофӣ калон, ҳатто натуралии $2N$, дар шакли $2N = p + n$ ифода карда мешавад, ки дар он $p$ адади сода аст ва $n$ аз аксар $l$ зарбшавандаҳои сода иборат аст» [18, с. 366].

Соли 1964 А.А. Бухштаб теоремаи 2 (А. Рени)-ро бо қимати $l = 3$ исбот кард. Ӯ айнан ҳамин хел теоремаро дар масъалаҳои ададҳои содаи дугоникҳо исбот намуд:

*«Теоремаи 3 (А.А. Бухштоб).* Маҷмуи ададҳои содаи $p$ ҳангоми $p + 2$, ки зиёда аз зиёда аз се зарбшавандаҳои сода иборатнест, беохир аст» [18, с. 366].

Бо дарназардошти ададҳои дугоники сода, В. Брун теоремаи зеринро низ ба исбот расонд:

*«Теоремаи 4 (В. Брун).* Қатори бузургиҳое, ки ба ададҳои содаи дугоник баръакс аст, наздикшаванда мебошанд.

Теоремаи 4 нишон медиҳад, ки ҳатто агар ададҳои дугоникҳои сода маҷмуи беохирро ташкил диҳанд, пас шумораи онҳо аз ҳамаи ададҳои сода хеле камтар аст. Миқдори қатори $\sum_p \frac{1}{p}$, ки муқобили ҳамаи ададҳои сода дуршаванда мебошанд, аммо агар дар он танҳо ададҳои содаи $p$-ро гузорем, ки $p' = p + 2$ низ сода бошад, пас мо қатори наздикшавиро ба даст меорем» [18, с. 366].

Соли 1969 математики англис Рисел Ханс (1929-2014) бо ёрии мошинаи электронии ҳисоббарор 6 ҷуфти ададҳои содаи дугоникро ёфт: аз ҳама калонтарини онҳо $p = 9 \cdot 2^{111} - 1$ ва $p = 9 \cdot 2^{111} + 1$ аст. Ҷуфти ададҳои дар шакли $p$ ва $p + 2m$ ($m -$ адади натуралӣ) низ мавҷуд аст. Масалан, ҷуфти ададҳои содаи 3 ва 13 ҳангоми $p = 3, m = 4$ будан ва ҳоказо.

Дар бораи ададҳои содаи ин шакл чунин гуфтан мумкин аст:

1) миқдори ададҳои содаи шакли $p$ ва $p + 4, p$ ва $p + 8, \cdots, p$ ва $p + 2^k$ дар байни ададҳои натуралии аз 1 то $n$ ба $\pi_2(n)$ наздиктарин аст;

2) миқдори ададҳои содаи шакли $p$ ва $p+6, p$ ва $p+12, \cdots, p$ ва $p+3\cdot2^k$ бошад, дар байни ададҳои натуралии аз 1 то $n$ назар ба $\pi_2(n)$ ду маротиба зиёд аст.

Ҷойгиршаии пайдарпайро бо 4-то чунин ададҳои содаи зерин нишон додан мумкин аст, ки онҳо 2 ҷуфт ададҳои содаи ҷуфти дугоникҳоро ташкил мекунад: масалан 11, 13; 17, 17 ва 179, 181; 191, 193.

Ҳолатҳои дар як вақт ададҳои сода будани $p, p+2$ ва $p+6$ ё ин ки $p, p+4$ ва $p+6$ низ мавҷуданд. Онҳоро ададҳои сетогаи сода ё ададҳои содаи сегоник меноманд. Масалан, 5, 7, 11. Аз ҳама калонтарин ададҳои содаи сегоники то ҳол маълумшуда инҳоянд: 100014491, 100014493 ва 100014497.

Ададҳои содаи дар шакли $p, p+2, p+6, p+8$ буда низ мавҷуданд. Ин гуна ададҳои содаро чоргоник меноманд. Масалан, 11, 13, 17, 19 ё ин ки 191, 193, 197, 199 ададҳои содаи чоргоник мебошанд. Соли 1957 математики фаронсавӣ А. Ферре (1893-1982) ҳосилшавии аз ҳама калонтарин адади содаи чоргоникро ҳангоми $p=2863308731$ будан аниқ кард. Ҳангоми $p=5, 101, 191, 821, 1481, 3251$ будан низ ададҳои содаи чоргоник ҳосил мешаванд.

Математики шуравӣ В.А. Голубев (1884-1954) дар байни ададҳои натуралии то $n=1000000$ 166 то ададҳои содаи чоргоник ва дар байни ададҳои натуралӣ $n=2000000$ бошад, 295 ададҳои содаи чоргоникро аниқ кард. Соли 1959 бошад, дар байни ададҳои натуралии $n=10\,000\,000$ ва $n=15\,000\,000$ мувофиқан 899 ва 1209 будани ададҳои содаи чоргоник, муайян шуд [31, с. 49-56].

Дар шакли ададҳои содаи $p, p+2, p+6, p+8, p+12$ ададҳои содаи типи якум ва $p, p+4, p+6, p+10, p+12$ –ро ададҳои содаи типи дуюми ададҳои содаи панҷгоник меноманд

Мисол. Ададҳои содаи панҷгоникиҳо инҳоянд: 5, 7, 11, 13, 17 ва 7, 11, 13, 17, 19. В.А. Голубев ададҳои содаи панҷгоникро, ки ба типи якум тааллуқ доранд, то сарҳади он $n=15\cdot10^6$ будан, ҳисоб кард.

| $n$ | $2 \cdot 10^6$ | $3 \cdot 10^6$ | $4 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^6$ | $6 \cdot 10^6$ | $7 \cdot 10^6$ | $8 \cdot 10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| типи якум ададҳои | 55 | 73 | 89 | 103 | 111 | 126 | 135 |

Ҷадвали 14.

| $9 \cdot 10^6$ | $10 \cdot 10^6$ | $11 \cdot 10^6$ | $12 \cdot 10^6$ | $12 \cdot 10^6$ | $14 \cdot 10^6$ | $15 \cdot 10^6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 146 | 160 | 173 | 180 | 187 | 194 | 203 |

Ҷадвали 15.

Ҳамин тавр, маълум шуд, ки то сарҳади $15 \cdot 10^6$ 203 – то ададҳои содаи панҷгоник мавҷуд аст.

Дар инкишофи минбаъдаи назарияи ададҳо олимони В. Линник, А.Я. Хинчин, Н.П. Романов, А.О. Гелфонд, И.М. Виноградов, А.А. Каратсуба, Н.Г. Чудаков ва дигарон саҳми калон гузоштаанд. Масалан, математики шуравӣ Н.П. Романов (1907-1972) дар рушди назарияи ададҳо, яъне масъалаҳои аддитивии назарияи ададҳо кор карда, қисми муҳимми корҳои илмии ӯ ба татбиқи назарияи фазои Гилберт оид ба назарияи ададҳо бахшида шудааст. Ғайр аз ин, дар замони шуравӣ барои рушди назарияи ададҳо Н.П. Романов ва шогирдҳои ӯ саҳми босазо гузоштааст. Яке аз шогирди маъруфи ӯ олими тоҷик Р.Ф. Файзиев мебошад, ки барои рушди назарияи ададҳои сода соли 1967 китобе ба номи «Ғалбери Эратосфен, умумикунӣ ва татбиқи он (ададҳои сода)», ки аз 242 саҳифа иборат аст, ба забони тоҷикӣ ба чоп расондааст [112]. Дар ин китоб, ки характери илмӣ-таҳқиқотӣ дорад, масъалаҳои зерини муҳимми илмӣ ба таври сода ва оммафаҳм баён карда мешавад: «ба таври ҷиддӣ баёнкунии баъзе масъалаҳои муҳим дар бораи ададҳои сода, дар бораи назарияи одии паҳншавии ададҳои сода дар прогрессияҳои арифметикӣ, омӯхтани қонуниятҳое, ки ба тақсимшавии ададҳо ва ҷудокунии онҳо ба зарбкунандаҳо дахл дорад. Ғайр аз ин, алоқаи одии хосиятҳои байни аддитивӣ ва мултипликативии ададҳое, ки онҳо ба таври қатъӣ бо «Ғалбери Эратосфен»–ии умумикардашуда алоқамананд, муайян карда шуд» [112, с. 2]. Олими дигари шинохтаи тоҷик Б.А. Элнатанов соли 1984 китобе ба номи «Развитие метода решета»-ро ба чоп расонид, ки аз 148 саҳифа иборат буда, ба таҳқиқи корҳои олимони барҷаста оид ба рушди «Ғалбери Эратосфен» бахшида шудааст [133]. Ин шаҳодат медиҳад, ки олимони тоҷик низ дар замони шуравӣ барои рушди назарияи ададҳои сода саҳми босазо гузоштаанд.

Дар замони шуравӣ корҳои олими барҷастаи шуравӣ ва рус А.А. Каратсубаро таъкид кардан ба маврид аст. А.А. Каратсуба барои рушди назарияи ададҳои сода корҳои зеринро ба анҷом расондааст. Ӯ дар замони худ зиёда аз 160 мақолаҳои илмӣ ва монографияҳои илмиро нашр карда, дар рушди назарияи ададҳо, самти «Суммаҳои тригонометрӣ ва интегралҳои тригонометрӣ», «Дзета функсияи Риман», «Характери Дирихле» ва ғайра корҳои зиёдеро ба анҷом расонидааст. Илова ба ин, А.А. Каратсуба шогирдони зиёдеро омада намудааст, ки маруфтарини он, олими машҳури тоҷик, академики АМИТ, профессор З.Ҳ. Раҳмонов буда, соли 1986 рисолаи номзадии худро таҳти роҳбарии А.А. Каратсуба ва мушовири илмӣ В.Н. Чудаков дар мавзуи «Распределение значений характеров Дирихле (Тақсимшавии қиматҳои характери Дирихле)» дифоъ кардааст. Олими барҷастаи тоҷик З.Ҳ. Раҳмонов [42, 43, 44, 45, 46] корҳои олимони шуравиро идома дода, ба қуллҳои баланди илмӣ расидааст, ки онро дар зербоби оянда баён мекунем.

*Аз таърихи муаммои назарияи аддитивии ададҳои сода.* Муаммоҳои аддитивии назарияи ададҳо гуфта, чунин масъалаҳоеро меноманд, ки дар онҳо таркиби ададҳои бутуни аз ҷамъшавандаҳои намуди муайян иборат, дида баромада мешаванд.

Масъалаи омӯзиши муаммои аддитивии ададҳои сода дар асрҳои XVII-XVIII шуруъ шудааст ва машҳуртарин аз ин муаммоҳо инҳо мебошанд:

– муаммои Голдбах-Эйлер;

– муаммои Варинг бо ҷамъшавандаҳои содаи қариб баробар;

– муаммои Эстерман бо ҷамъшавандаҳои содаи қариб баробар;

– муаммои ададҳои содаи дугоник.

Талаботе, ки ба ҷамъшавандаҳо гузошта шудааст, қисман аз ифодакунии мултипликативии онҳо алоқаманд аст, яъне ифодакунии онҳо дар намуди ҳосили зарби зарбшавандаҳои сода, иборат мебошад:

«Дар чунин муаммоҳои аддитивӣ вобастагиҳое, ки дар байни хосиятҳои ададҳои бутун нисбат ба зарб (хосиятҳои мултипликативӣ) ва хосиятҳои онҳо нисбат ба ҷамъ (хосиятҳои аддитивӣ) муйян шудааст, таҳқиқ карда мешаванд. Ин вобастагиҳо характери ниҳоят мураккаб доранд» [71, 108, 109, с. 220-241].

*Аз таърихи омӯзиши муаммои Голдбах-Эйлер.* Яке аз муаммоҳои машҳуре, ки ададҳои сода бо он мансуб аст, муаммои Голдбах мебошад, ки дар саҳифаи 20 мухтасар маълумот дода шудааст.

Дар тули қариб ду аср кӯшишҳои ҳалли муаммои Х. Голдбах бебарор мемонданд. Соли 1912 дар Конгресси байналмилалӣ математики олмонӣ Э. Ландау (1877-1938) вобаста ба ин муаммо ҳатто хулосаи пессимистӣ бароварда буд: «Муаммои Х. Голдбах аз тавоноии математикаи муосир зиёдтар аст. Ва худи ҳамон сол Э. Ландау чунин муаммо гузошта буд, ки ҳар як адади натуралии $N > 1$-ро ҳамчун суммаи на бештар аз як миллион ё ягон миқдори муайяни ададҳои сода навиштан мумкин аст. Аммо ин муаммои гузошташуда низ дар он вақт ниҳоят душвор менамуд» [58, с. 123-125].

«Натиҷаи аввалинро дар самти ҳалли муаммои Голдбах математики барҷастаи шуравӣ Л.Г. Шнирелман (1905-1938) ба даст оварда, соли 1930 дурусттии теоремаро дар шакле, ки Э. Ландау пешниҳод карда буд, исбот намуд» [18]. Теоремаи Л.Г. Шнирелманро дар шакли зерин таъриф додан мумкин аст [56, 128, 129]:

«Теоремаи 1 (Л.Г. Шнирелман). *Чунин ададҳи доимии $k$ мавҷуд аст, ки дилхоҳ ададҳи натуралии аз 1 калонро метавонем ҳамчун суммаи на бештар* *аз k адади сода тасвир кунем, яъне барои ҳар як адади натуралии* $N(N > 1)$ *тасвири зерин ҷой дорад*

$$N = p_1 + p_2 + \cdots + p_k,$$

*ки дар ин ҷо* $p_i$ *ададҳои дилхоҳи сода ё сифрҳо мебошанд*» [19, с. 81-88].

Адади k-и Л.Г. Шнирелман хеле калон буд; аммо дар айни замон дурустии теорема бо усули Л.Г. Шнирелман барои қиматҳои нисбатан хурди k исбот шудааст. Агар ададҳои натуралии $N \geq N_0$, яъне ададҳои натуралиро аз ягон рақам сар карда гирем, он гоҳ усули Л.Г. Шнирелман имкон медиҳад, ки дурустии теоремаро барои $k = 18$ исбот кунем:

«Таҳқиқоти Л.Г. Шнирелман дар он вақт барои математикон хеле, ҳаяҷонбахш буд, махсусан он чи шоёни диққат аст, ки усулҳои кор карда баромадаи ӯ асоси самти нави назарияи ададҳо гардиданд. Усули Л.Г. Шнирелман на танҳо дар муаммои Голдбах-Эйлер, балки дар дигар муаммоҳои аддитивӣ низ татбиқ мешавад. Математики шуравӣ Н.П. Романов (1907-1972), бо истифодаи усули Л.Г. Шнирелман муаммои маҷмуи ададҳои натуралиро ҳамчун ҷамъи адади сода ва адади шакли $a^n$-ро барои адади бутуни додашудаи $a > 1$ омӯхта, натиҷаҳои назаррас ба даст овард» [18, с. 7-14].

Соли 1934 академик И.М. Виноградов (1891-1983) дар ҳалли муаммоҳои аддитивӣ бо ададҳои сода муваффақияти комилан бемисл ба даст овард. Ба ӯ муяссар шуд, ки муаммои Голдбахро барои ҳамаи ададҳо аз ягон рақами муайяни бениҳоят калон сар карда, пурра ҳал кунад, яъне И.М. Виноградов теоремаи зеринро исбот намуд:

«Теорема. Чунин адади доимии $N_0$ вуҷуд дорад, ки ҳамаи ададҳои тоқи аз $N_0$ калонро ҳамчун ҷамъи се адади сода ифода кардан мумкин аст» [22, с. 291-294].

Ҳамин тариқ, муаммои Х. Голдбах барои ҳамаи ададҳо, ба истисноии шумораи маҳдуди онҳо, ҳал карда шуд. Санҷиши дурустии теоремаи Х. Голдбахро барои ададҳои аз $N_0$ калоннабуда низ нишон додан мумкин аст, аммо он то ҳол ҳалли худро наёфтааст. Қимати бадастомадаи $N_0$

чунон калон аст, ки барои санҷиши дурустии теоремаи Х. Голдбах оид ба ададҳои аз $N_0$ калоннабуда, ҳатто компютерҳои электронии баландсуръати ҳозиразамон низ вақти бениҳоят зиёдро талаб мекунанд [46, с. 19-37].

«Ҳалли муаммои Х. Голдбах аз тарафи И.М. Виноградов дар инкишофи назарияи аналитикии ададҳо бениҳоят муҳим мебошад. И.М. Виноградов ҳангоми ҳалли ин муаммо усули хеле пуриқтидори эҷодкардаи худро ба кор бурд, ки ба истифодабарии суммаҳои охирноки тригонометрӣ асос ёфтааст» [18]. Ин усул дар ҳалли бисёр муаммоҳои мураккаби назарияи ададҳо ва дар ҳолати хусусӣ ба муаммоҳои адитивии ададҳои сода татбиқ пайдо кардааст.

«Усули И.М. Виноградов барои ҳалли муаммоҳои аддитивӣ бо ду ҷамъшавандаи сода нокофӣ баромад ва муаммои Голдбах-Эйлер дар бораи ифодаи ададҳои чуфт ҳамчун ҷамъи ду адади сода то имрӯз ҳалношуда боқӣ мондааст. Дар баробари ин, исбот карда шуд (Н.Г. Чудаков (1904-1986), Ван-Корпут (1890-1975), Т. Эстерман (1902-1991), ки қариб ҳамаи ададҳои ҷуфтро бо ҷамъи ду адади сода тасвир кардан мумкин аст. Ин маънои онро дорад, ки нисбат ба шумораи ададҳои дар фосила [1; N] буда, ки ба ҷамъи ададҳои сода тасвирнашаванда аст, бо қимати N, ҳангоми афзоиши N ба сифр майл мекунад» [18].

Яке аз муаммоҳои назарияи ададҳо ин муаммои Варинг буда, дар хусуси он дар саҳифаи 48-49 мухтасар маълумот додашуда, дар ин зербоб васеътар баён мекунем.

Баъдан дар асри XIX муаммои оид ба тасвир намудани дилхоҳ адади натуралии $n$ базиси охирноки тартиби $V\ (n)$ –и қатори ададҳои натуралӣ будани дараҷаҳои ба қайдгирфташудаи $n$ –и ададҳои содаи $p$ баррасӣ гардид. Гузориши ин муаммо дар таҳқиқоти математики Венгрия П. Эрдёш (1913-1996) омадаст, ки мувофиқи он ҳар як адади кифоя калони натуралии N – ро дар намуди

$$N = p_1^n + p_2^n + \cdots + p_r^n$$

ифода кардан мумкин аст, ки дар он $p_1, p_2, \cdots, p_r -$ ададҳои сода ва $k \leq V(n)$ мебошанд. Ин муамморо муаммои Голдбах-Варинг меноманд, зеро он, аз як тараф, муаммои Голдбахро дар бораи ифода намудани адади додашуда, ҷамъи ададҳои сода ва аз тарафи дигар, муаммои Варингро дар бораи ифода кардани адад ҳамчун ҷамъи дараҷаҳои ададҳои сода инъикос менамояд.

Муаммои дуалии Голдбах ҳанӯз ҳал нашудааст. Натиҷаи беҳтарини муосир, ки ба исботи ин муаммо наздиктар аст, ба олими чинӣ Ҷ.Р. Чен тааллуқ дорад. Ҷ.Р. Чен тибқи таҳқиқоти худ исбот кард, ки ҳар як адади ҷуфти N ҳамчун ҷамъи

$$p + P_2 = N,$$

ифода мешавад, ки дар он $P_2$ адади сода ё ҳосили зарби ду адади сода мебошад. Исботи содатари теоремаи Ҷ.Р. Чен аз ҷониби математики Канада Х. Росс (1929-2016) пешниҳод гардидааст.

Соли 1938 математики чинӣ Хуа Луо Ген (1910-1985) [129, 130] бо истифода аз баҳодиҳии И.М. Виноградов барои суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои сода, формулаи асимптотикии адади натуралии N-ро дар шакли ҷамъи панҷ квадрати ададҳои сода исбот кард ва нишон дод, ки қатори махсуси ин формула, ҳангоми $N \equiv 5 \ (mod 24)$ аз доимии мутлақи мусбат бузургтар аст. Ҳамин тариқ, Хуа Луо Ген исбот намуд, ки ҳар як адади натуралии ба қадри кофӣ калон $N \equiv 5 (mod\ 24) -$ро ҳамчун ҷамъи квадрати панҷ адади содаи намуди

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N$$

тасвир намудан мумкин аст.

И.М. Виноградов [24] бо истифода аз усули суммаҳои тригонометрӣ дар муаммои Голдбах-Варинг формулаи асимптотикиро пайдо кард. Масъалаи мавҷудияти функсияи $V(n)$ ва сарҳади болоии он танҳо вобаста ба қимати параметри $n$, то соли 2009 ҳалнашуда буд ва аз ин рӯ, муаммои Голдбах-Варинг дар маҷмуъ то ба наздикӣ ҳалношуда боқӣ монд. Математики шуравӣ ва рус В.Н. Чубариков [126] бо истифода аз назарияи худ оид ба суммаҳои чандкаратаи тригонометрӣ бо ададҳои сода, ки рушди минбаъдаи усули баҳодиҳии суммаҳои тригонометрии И.М. Виноградов бо ададҳои сода мебошад, муаммои Голдбах-Варингро комилан ҳал кард.

*Аз таърихи омӯзиши муаммои Эстерман.* Дар назарияи аналитикии ададҳо масъалаҳои ҳамчун ҷамъи як адади сода ва дигар ададҳои типи муайян ифода намудани ададҳо низ мавҷуданд.

Ин намуди мушкилот одатан хеле душвор аст. Масалан, танҳо усулҳои хеле мураккаби таҳлилӣ ба математики шуравӣ Ю.В. Линник [62, 63, 64, 65] (1915-1972) имкон доданд, ки соли 1959 муаммоеро, ки соли 1923 математикҳои англис Г.Х. Харди (1877-1947) ва Ҷ.И. Литлвуд (1885-1977) [66] пешниҳод карда буданд, ҳал кунад ва маҳз ӯ тавонист теоремаи зеринро исбот кунад:

«Теорема. Ҳар як адади натуралии ба қадри кофӣ калони n-ро ҳамчун ҷамъи адади сода ва ду квадрати ададҳои бутун, яъне ҳамчун

$$n = \rho + k^2 + \iota^2$$

тасвир кардан мумкин аст» [66].

Соли 1937 математики олмонӣ Т. Эстерман муаммоеро ҳал намуд, ки нисбат ба муаммои Г.Х. Харди ва Ҷ.И. Литлвуд шартҳои қатъӣ дошт, яъне: «ҳар як адади натуралии ба қадри кофӣ калони $n$ −ро ҳамчун ҷамъи ду адади сода ва квадрати адади бутун, яъне ҳамчун

$$n = \rho + p^2 + \iota^2$$

тасвир намудан мумкин аст» [70] .

## 3.2. Корҳои олимони тоҷик оид ба назарияи ададҳои сода дар давраи истиқлолияти давлатӣ (солҳои 1991-2020)

Институти математикаи Академияи илмҳои ҶШС Тоҷикистон соли 1973 дар заминаи Шуъбаи математика бо Маркази ҳисоббарории Академияи илмҳои ҶШС Тоҷикистон таъсис дода шудааст. Нахустин директор ва ташкилкунандаи он академик А.Ҷ. Ҷӯраев (1932-2005) солҳои 1973-1987 буд. Дар солҳои минбаъда институтро академик З.Ҷ.

Усмонов (1937-2021) солҳои 1987-1999 роҳбарӣ намуд. Аз соли 1999 то марти соли 2024 роҳбарии институтро академики Академияи илмҳои Тоҷикистон З.Ҳ. Раҳмонов (соли таваллуд 1959) ба уҳда доштанд. Аз марти соли 2024 то инҷониб роҳбарии институтро номзади илмҳои физикаю математика Раҳимзода А.О. ба уҳда дорад.

Олими машҳури тоҷик, академики АМИТ, профессор З.Ҳ. Раҳмоновро ҳамчун асосгузори мактаби назарияи аналитикии ададҳо дар Тоҷикистон мешиносанд, ки роҷеъ ба ҳалли масъалҳои гуногуни ададҳои сода натиҷаҳои назаррас ба даст овардааст.

Таҳқиқоти Раҳмонов З.Ҳ. доир ба масъалаҳои мураккаби назарияи аналитикии ададҳо, ҳамчун татбиқи системавӣ аз назарияи даврии функсияҳои арифметикӣ бо ёрии комбинатсияҳои моҳиронаи методҳо ва ғояҳои назариявию ададӣ ва назариявию функсионалӣ, ки солҳои охир аз ҷониби худи ӯ ва дигар математикони олам рушд ёфтааст, муаррифӣ шудааст.

Дар ин зербоб мо оид ба он корҳои таҳқиқотии З.Ҳ. Раҳмонов, ки ба масъалаҳои гуногуни назарияи ададҳои сода, яъне «суммаи қиматҳои ғайриасосии характери Дирихле дар пайдарпайиҳои лағжонидашудаи ададҳои сода», «Қимати миёнаи функсияи Чебишёв ва татбиқи он», «Суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои сода ва татбиқи онҳо дар масъалаҳои аддитивии ададҳои сода» алоқамандӣ дорад, мухтасар баён мекунем.

*1. Суммаи қиматҳои ғайриасосии характери Дирихле дар пайдарпайиҳои лағжонидашудаи ададҳои сода*

И.М. Виноградов бо усули тартибдодаи худ, яъне: «усули баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ, як қатор масъалаҳои муҳимми арифметикӣ бо ададҳои содаро ҳал намуд. Яке аз ин масъалаҳо ин тақсимшавии қиматҳои ғайриасосии характери Дирихле дар пайдарпайиҳои ададҳои содаи лағжонидашуда мебошад. Соли 1938 И.М. Виноградов, ҳангоми $x \gg q^{3+\varepsilon}$ буда, чунин тасдиқотро исбот намуд, ки агар $q$ - адади содаи тоқ, $(l, q) =$

1, $\chi(a)$ – характери ғайриасосӣ аз рӯи модули q бошад, он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад» [21, с.311-320]:

$$|T_1(\chi)| = \sum_{p\le x}\chi(p-l) \ll x^{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{\sqrt[3]{x}}}.$$

Соли 1943 И.М. Виноградов [23, с.17-34] баҳои нави суммаи $|T_1(\chi)|$ –ро муайян намуда, исбот кард, ки

$$|T_1(\chi)| \ll x^{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}+x^{-\frac{1}{6}}} \qquad (1)$$

аст. Ин формулаи асимпитотикии ёфташуда ҳангоми $x \gg q^{1+\varepsilon}$ будан, ғайритривиалӣ мебошад. И.М. Виноградов соли 1953 ҳангоми $x \ge q^{0,75+\varepsilon}$ будан баҳои ғайритривиалии $T_1(\chi)$ –ро, ҳосил намуд, ки дар ин ҷо $q$ – адади сода мебошад.

«Соли 1968 А.А. Каратсуба [42, с. 20-30] усулеро эҷод намуд, ки тавассути ин усул, баҳои ғайритривиалии суммаҳои кӯтоҳи характерҳоро дар майдонҳои охирноки дараҷаашон қайдкардашуда ҳосил намуд. Соли 1970 бо истифода аз ин усул ва дар якҷоягӣ бо методи И.М. Виноградов ӯ дурустии теоремаи зеринро исбот намуд: *агар $q$ - адади сода, $\chi(a)$ – характери ғайриасосӣ аз рӯи модули $q, x \ge q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ бошад, он гоҳ формулаи зерин ҷой дорад*» [43, с. 724-727]:

$$T_1(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

А.А. Каратсуба [44] ин натиҷаро барои дарёфти формулаҳои асимптотикӣ барои миқдори тафриқҳои квадратӣ ва ғайриквадратии намуди $p+k$ ва миқдори ҳосили зарбҳои ададҳои содаи лағжонидашудаи намуди $p(p'+k)$ дар прогрессияҳои арифметикии фарқашон афзоянда истифода бурдааст. З.Ҳ. Раҳмонов баҳои И.М. Виноградов, аниқтараш баҳои

$$|T_1(\chi)| \ll x^{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}+x^{-\frac{1}{6}}} \quad -\text{ро},$$

ҳангоми модули характери Дирихле адади таркибӣ будан, умумӣ гардонида, теоремаи зеринро исбот намудааст, ки он чунин аст:

«Бигзор $D$ –адади натуралии кифоя калон, $\chi$ –характери ғайриасосӣ аз рӯи модули $D$, $\chi q$ – характери примитивии тавлидшудаи характери $\chi$, $q_1$ –ҳосили зарби ададҳои содае, ки $D$ –ро тақсим карда, аммо адади $q$ –ро тақсим намекунад, бошад, он гоҳ формулаи зерин дуруст аст» [79, с. 201-202]:

$$T_1(\chi) \leq x \ln^6 x \left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right)\tau(q).$$

Ин баҳоро истифода бурда, З.Х. Раҳмонов [80, с. 103-106] барои $G(D,l)$, ки хурдтарин адади голдбахӣ дар прогрессияи арифметикии

$$Dk+l, \quad k=0,1,2,\cdots,$$

мебошад, баҳои зеринро исбот намуд:

$$G(D,I) \ll \mathrm{D}^{c+\varepsilon},$$

ки дар ин ҷо $\varepsilon$ – доимии кифоя хурди мусбат, $D$- адади натуриалии тоқи кифоя калон, $c$ – сарҳади поёнии ададҳои $a$, ки барои баъзе доимиҳои $A >$ 2,

$$\sum_{\chi \bmod D} N(\alpha,T,\chi) \ll (DT)^{2\alpha(1-\alpha)}(ln\, DT)^A$$

аст. Масъалаи тақсимшавии ададҳои голдбахӣ дар прогрессияи арифметикии «кӯтоҳ», ҳангоми ҳал намудани муаммои бинарии Голдбах пайдо шудааст. Аввалин натиҷаи шартии ин масъаларо Ю.В. Линник [64] исбот намудааст. Ӯ бо истифода аз фарзияи васеи Риман нишон дод, ки барои хурдтарин адади голдбахӣ дар прогрессияи арифметикӣ нобаробарии

$$G(D,l) \leq D \ln^6 D$$

ҷой дорад. К. Прахар [157, с. 367-376] натиҷаи Ю.В. Линникро аниқтар намудааст. Ӯ бо ҳамон шартҳои дар натиҷаи бадастовардаи Ю.В. Линник ҷойдошта, нобаробарии зеринро исбот намуд:

$$G(D,l) \ \leq \ D(ln\, D)^{3+\varepsilon}.$$

Соли 1968 М. Ютила [158] бо истифода аз баҳои И.М. Виноградов, яъне баҳои (1)-ро истифода бурда, нишон дод, ки агар $D -$ адади содаи тоқ бошад, он гоҳ чунин формула дуруст аст:

$$G(D,l) \ll \mathrm{D}^{\frac{11}{8}+\varepsilon}.$$

Аз «зичии» теоремаи Н.Н. Хаксли [148, с. 164-170] бармеояд, ки ҳангоми $A = 14$ будан, дар формулаи охирон

$$c \leq \frac{6}{5}$$

мебошад.

«Ҷ.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский барои адади таркибии $q$ нишод доданд, ки баҳои ғайритривиалии суммаҳои $T_1(\chi_q)$, ҳангоми дарозии сумма $x$ дар навбати худ аз $q$ хурд будан, мавҷуд мебошад. Онҳо исбот намуданд, ки барои характери примитивии $\chi_q$ ва ихтиёрӣ $\varepsilon > 0$ чунин $\delta > 0$ мавҷуд аст, ки барои ҳамаи $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ баҳои зерин дуруст аст» [112, с. 605-619]:

$$T_1(\chi_q) \ll xq^{-\delta}. \qquad (2)$$

З.Ҳ. Раҳмонов теоремаи зеринро оид ба баҳои суммаи $T_1(\chi_q)$ исбот намуд: «агар $\mathrm{q}$ – адади натуралии кифоя калон, $\chi_{\mathrm{q}}$ – характери примитивӣ аз рӯи модули $\mathrm{q}\,,(\mathrm{l},\mathrm{q}) = 1$, $\varepsilon$ – доимии кифоя хурди мусбат ва $\mathrm{x} \geq \mathrm{q}^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ бошад, он гоҳ баҳои зерин дуруст аст» [85, с. 5-9]:

$$T_1(\chi_q) \ll x\, exp\left(-\sqrt{ln\, q}\right).$$

З.Ҳ. Раҳмонов ва шогирди ӯ Ш.Ҳ. Мирзораҳимов теоремаи зеринро исбот намуданд, ки: «*агар $q$ – адади натуралии кифоя калони аз куб озод, $\chi_q$– характери примитивӣ аз рӯи модули $q\,,(l,q) = 1, \varepsilon$ – доимии кифоя хурди мусбат ва $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ бошад, он гоҳ баҳои зерин дуруст аст*» [67, с. 202-216]:

$$T_1(\chi_q) \ll x\, exp\left(-\sqrt{ln\, q}\right).$$

Ин баҳои ёфташуда, баҳои А.А. Каратсубаро ҳангоми модули характери аз куб озод будан умумӣ мегардонад.

Киерр Б. [138], ҳангоми $x \geq q^{\frac{5}{6}+o(1)}$ баҳои (2)-ро исбот намуд.

З.Ҳ. Раҳмонов чунин теоремаро исбот намуд: «*бигзор $D$ – адади натуралии кифоя калон, $\chi -$ характери ғайриасосӣ аз рӯи модули $D$, $\chi_q$ – характери примитивӣ аз рӯи модули $q$ тавлидшудаи характери $\chi$, $q$ – адади аз куб озод, $(l, D) = 1$, $\varepsilon$ – доимии кифоя хурди мусбат бошанд, он гоҳ ҳангоми $x \geq D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ будан, формулаи зерин дуруст аст*» [89, с. 378-382]:

$$T_1(\chi) \ll x\,exp\left(-0{,}6\sqrt{ln\,D}\right).$$

З.Ҳ. Раҳмонов ва шогирди ӯ Д.Ҷ. Хокиев чунин теоремаро исбот намуданд: «бигзор $D$ – адади натуралии кифоя калон, $\chi -$ характери ғайриасосӣ аз рӯи модули $D$, $\chi_q$ – характери примитивии аз рӯи модули $q$ тавлидшудаи характери $\chi$, $q$ – адади аз куб озод, $(l, D) = 1, \varepsilon$ – доимии кифоя хурди мусбат бошанд, он гоҳ ҳангоми $x \geq D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ будан, формулаи зерин дуруст аст» [119, с. 5-11]:

$$T_1(\chi) \ll x\,exp\left(-0{,}6\sqrt{ln\,D}\right).$$

*2. Қимати миёнаи функсияи Чебишёв ва татбиқи он*

Функсияи Чебишёв гуфта, суммаи

$$\psi(y, \chi) = \sum_{n \leq y} \Lambda(n)\chi(n)$$

– ро меноманд, ки дар ин ҷо $\chi(n) -$ характери Дирихле аз рӯи модули $q$, $\Lambda(n) -$ функсияи Манголдт мебошанд.

Ҳангоми таҳқиқи масъалаҳои зиёди назарияи ададҳои сода масъалаи аз боло баҳо додани суммаи қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле ба миён меояд, яъне баҳои суммаи зерин

$$t(x; q) = \sum_{\chi mod q} \max_{y \leq x} |\psi(y, \chi)|.$$

Ба ин доира муаммоҳои зерин дохил мешаванд:

– баҳои суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои сода, аз он ҷумла суммаи тригонометрии хаттӣ бо ададҳои сода;

– тақсимшавии ададҳои Харди-Литтлвуд дар прогрессияҳои арифметикӣ.

«Ю.В. Линник [62] бори аввал тавассути қимати миёнаи функсияи Чебишёв баҳои ғайритривиалии суммаҳои тригонометрии хаттӣ бо ададҳои содаи $S(\alpha, x)$ дарёфт намуд. Вай бо ёрии теоремаи зиччӣ барои нулҳои L-қатори Дирихле ва ғояҳои Г. Харди ва Д. Литтлвуд, ки дар муаммои Голдбах истифода шуда буданд, баҳои ғайритривиалии нави $S(\alpha, x)$ –ро ҳосил кард. Ҳамин тавр, Ю.В. Линник исботи нави теоремаи И.М. Виноградовро оид ба муаммои Голдбах дарёфт намуд» [147, с. 68-80].

«Соли 1947 Н.Г. Чудаков низ чунин усули таҳқиқоти суммаҳои тригонометрии хаттиро бо ададҳои сода бо ёрии баҳои қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв, ки дар навбати худ ба тақсимшавии нулҳои L-қатори Дирихле дар хатҳои критикӣ (буҳронӣ) асос карда шудааст, пешниҳод намуд» [122, с. 515-545].

«А.А. Каратсуба методи ҳалли масъалаҳои тернарии мултипликативиро бо ҳамбастагии методи И.М. Виноградов — баҳоҳои суммаҳо бо ададҳои сода коркард карда, барои ҳолати оддитарин бузургии $t(x;\ q)$ – ро баҳо дод» [43, с. 724-727].

Соли 1974 Г. Монтгомери аз теоремаи зичии худ оид ба L-функсияи Дирихле истифода бурда, барои $t(x;\ q)$ дурустии нобаробарии зеринро исбот кард

$$t(x;\ q) \ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}\, q)\mathcal{L}^{17}, \mathcal{L} = \ln xq. \qquad (3)$$

Ин баҳоро Р. Вон беҳтар намуда, исбот кард, ки

$$t(x;\ q) \ll x\mathcal{L}^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}\mathcal{L}^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}\, q\mathcal{L}^{\frac{7}{2}} \qquad (4)$$

мебошад. «Соли 1989 З.Ҳ. Раҳмонов дар кори [81, с. 211-224] нишон дод, ки

$$t(x;\ q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\,q)x^{\delta}. \qquad (5)$$

Ин баҳо аз (3) беҳтар ва аз (4) сусттар буда, вале исботи он нисбат ба (4) ва (5) одӣ гузаронида шуда, ба усули ҳалли масъалаҳои тернарии мултипликативии А.А. Каратсуба [43, с. 724-727] такя мекунад.

Аз баҳоҳои (3), (4) ва (5) барои $t(x;\ q)$ маълум аст, ки аз се ҷамъшавандаҳои дар ин баҳо иштироккунанда, ду ҷамъшавандаи канории он то саҳеҳии дараҷаи охирноки логарифм баробар буда, онҳоро нисбат ба дараҷаҳои $x$ ва $q$ умуман беҳтар намудан номумкин аст. Бинобар ин, дастовардҳои минбаъда барои баҳои $t(x;\ q)$ метавонад танҳо беҳтар намудани ҷамъшавандаи дуюм бошад. Дар солҳои 1993–1995 З.Ҳ. Раҳмонов усули нави таҳқиқи қиматҳои миёнаи функсияҳои арифметикии намуди функсияи Чебишёвро аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле сохт. Татбиқи ин метод ба ӯ имконият дод, ки дар муаммоҳои зерин натиҷаҳои беҳтаринро ба даст орад:

– баҳои қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв (аз он ҷумла бо вазни экспоненсиалии хаттӣ ва квадратӣ дар интервали кӯтоҳ) аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихлеи модули додашуда;

– баҳои қиматҳои миёнаи функсияҳои Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои примитивии Дирихле, ки модулашон аз бузургии додашуда зиёд намебошанд ва дар ҳолати хусусӣ, барои $t(x;\ q)$ – қимати миёнаи функсияи Чебишёви ҳамаи характерҳои Дирихлеро аз рӯи модули додашуда исбот намуд, ки

$$t(x;\ q) \ll (x + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\,q)\mathcal{L}^{34}. \qquad (6)$$

аст» [81, с. 211-224; 82, с. 281-282].

«Харди ва Литтлвуд гипотезаеро пешниҳод карданд, ки дар он ҳамаи ададҳои кифоя калони натуралии $n$ ба суммаи адади сода ва дараҷаи адади натуралӣ дар намуди

$$n = p + m^{k},\ k \geq 2$$

ҷудо карда мешавад» [146, с. 1-70].

«Чунин ададҳоро мо ададҳои Харди-Литтлвуд меномем. Г. Бобоев ин гипотезаро рад кард, яъне беохир пайдарпайии ададҳои натуралиро нишон дод, ки адади Харди - Литтлвуд намебошанд. Аз ин ҷо дар ҳолати хусусӣ бармеояд, ки чунин адади $l, 1 \leq l \leq q$ мавҷуд аст, ки барои он нобаробарии

$$H_k(q,l) > q, \; k \geq 2,$$

иҷро шуда, дар ин ҷо $H_k(q,l) -$ хурдтарин адади Харди - Литтлвуди намуди $p + m^k$ мебошад, ки дар прогрессияи арифметикии $qt + l, t = 0, 1, 2, \ldots, q$ – бутун, мехобад. Бинобар ин, табиатан ду масъалаи зеринро дида баромадан мумкин аст» [6, с. 49-68]:

1. Ҳарчи беҳтар аз боло баҳодиҳии бузургии $H_k(q,l)$ .

2. Ҳосил намудани қонуни асимптотикии тақсимшавии ададҳои Харди - Литтлвуд, ки дар прогрессияи арифметикии хеле зич мехобанд.

«Ҳангоми $q$ – адади сода ва $k \geq 2$ будан, ин ду масъала дар корҳои [81] таҳқиқ ва тасдиқоти зерин исбот карда шудааст: бигзор $q$ – адади сода, $x \geq 2, (l,q) = 2$ бошад, он гоҳ формулаи асимптотикии зерин ҷой дорад» [82, с. 281-282]:

$$\sum_{\substack{n\leq x, m\leq x^k \\ n+m^k\equiv l \,(mod\, q)}} \Lambda(n) - \frac{x^{\frac{k+1}{k}}}{\varphi(q)} \ll x\, exp\left(-c\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\right) + \left(xq^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}\right)\mathcal{L}^{35}. \qquad (7)$$

Аз ин формула дар ҳолати хусусӣ бармеояд, ки

$$H_2(q,l) \ll q^{\frac{3}{2}} \ln^{35} q. \qquad (8)$$

Нозиров О.О. соли 2019 дар таҳқиқот оид ба масъалаҳои гуфташуда натиҷаҳои зеринро ба даст овард:

«Теоремаи 1. Ҳангоми $x \geq 2$ ва $q \geq 1$ будан, баҳои зерин ҷой дорад» [73, с. 613-618]:

$$t(x;\, q) \ll x\mathcal{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}\, q^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}^{31} + x^{\frac{4}{5}}q\mathcal{L}^{32}.$$

Баҳои дар ин теорема гирифташуда беҳтаркунии баҳои

$$t(x;\ q) \ll \left(x + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q\right)\mathcal{L}^{34}$$

мебошад, ки онро соли 1993 З.Ҳ. Раҳмонов [82, с. 281-282] бо усули таҳқиқи қиматҳои миёнаи функсияҳои арифметикии намуди функсияи Чебишёв аз рӯи ҳамаи характерҳои Дирихле исбот намудааст ва онро расман ба ду марҳалаи зерин ҷудо кард:

Теоремаи 2. Бигзор $(a, q) = 1$ бошад. Он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад:

$$S\left(\frac{\alpha}{q}, x\right) \ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}^{28} + x^{\frac{4}{5}}\mathcal{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}q\mathcal{L}^{33}.$$

Натиҷаи 2.1. Бигзор $\left|\alpha - \frac{\alpha}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$, $(a, q) = 1$ бошад, он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад:

$$S(\alpha, x) \ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}^{33} + x^{\frac{4}{5}}\mathcal{L}^{32} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}q\mathcal{L}^{33}.$$

Натиҷаи 2.2. Бигзор $\eta \leq x^{\frac{2}{5}}$, $\eta \leq q \leq x\eta^{-1}$, $|\alpha - aq^{-1}| \leq 2\eta(qx)^{-1}$, $(a, q) = 1$ бошад, он гоҳ баҳои зерин ҷой дорад:

$$S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}^{33}.$$

Ин баҳоҳо мувофиқан баҳоҳои

$$S(\alpha, x) \ll \left(xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}\, q^{\frac{1}{2}}\right)\mathcal{L}^{35} \text{ва } S(\alpha, x) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}^{35} - \text{ро}$$

беҳтар мекунанд.

Формулаи асимптотикӣ барои миқдори ададҳои Харди-Литтлвуд дар прогрессияҳои арифметикии кӯтоҳ исбот карда мешавад.

Теоремаи 3. *Бигзор* $x \geq x_0$, $q = p^{\alpha}$, $p$ *– адади содаи тоқ,* $p \geq \mathcal{L}^{58}$, $\alpha$ *– адади натуралии қайдшуда,* $(l, p) = 1$, $\rho(p, l)$ *– миқдори ҳалҳои муқоисаи* $n^2 \equiv l(mod\, p)$,

$$H_2(x;\ q, l) = \sum_{\substack{n \leq x, m^2 \leq x \\ n + m^2 \equiv l(mod\ q)}} \Lambda(n)$$

*бошад.*

*Он гоҳ формулаи асимптотикии зерин ҷой дорад*

$$H_2(x;\ q,l)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\varphi(q)}\left(1+O\left(\mathcal{L}^{-1}+\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{x}}\mathcal{L}^{29}+\frac{q}{x^{\frac{7}{10}}}\mathcal{L}^{32}+\frac{q^{1,5}}{x}\mathcal{L}^{33}\right)\right),$$

*ки доимии дар зери аломати $O$ буда аз $\alpha$ вобаста аст.*

*Қайд мекунем, ки ин формула ғайритривиалӣ мешавад, агар*

$$q \ll x^{\frac{2}{3}}\mathcal{L}^{\frac{-68}{3}}$$

*бошад.*

**Натиҷаи 3.** *Бигзор $q=p^{\alpha}, p$ – адади сода, $\alpha$ – адади натуралии қайдшуда, $(l,p) = 1$ бошад. Он гоҳ*

$$H_2(q,l) \ll q^{\frac{3}{2}}(ln\,q)^{34}.$$

*Формулаи асимптотикии ҳосилшуда дар теоремаи 3 ва баҳои аз боло барои $H_2(q,l)$ ҳангоми $k = 2$ бадастомада, мувофиқан беҳтаркунӣ ва умумикунии формулаҳои (7) ва (8) дар ҳолати, $q$ – фарқи прогрессия дараҷаи адади сода будан, мебошад.*

*3. Суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои сода ва татбиқи онҳо дар масъалаҳои адитивии ададҳои сода*

Суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ бо ададҳои содаро бори аввал И.М. Виноградов [24] омӯхт. Барои суммаи намуди

$$S_3(\alpha;\ x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(\mathrm{n})e(\alpha n^k),$$

ҳангоми $k = 1$ будан методи баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои содаи худро истифода бурда, дар камонҳои хурди $m(exp(c(ln\,ln\,x)^2))$, $\tau = x^{\frac{1}{3}}$ ҳангоми $y > x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ будан баҳои ғайритривиалӣ гирифт.

Баъдтар математики англис С.Б. Хайзелгров (1926-1964), математики шуравӣ В. Статулявичус (1927-2003), математикони чинӣ Сзя Чаохуа, Пан Чен-дон, Пан Чен-бяо, Тао Жан барои суммаи $S_1(\alpha;\ x,y), y \ge x^{\theta}$ дар камонҳои хурд баҳои ғайритривиалӣ гирифта, рафтори онҳоро дар камонҳои калон таҳқиқ намуда, дар муаммои тернарии Голдбах бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, яъне барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии

$$N = p_1 + p_2 + p_3, \quad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad \mathrm{H} = \mathrm{N}^{\theta+\varepsilon}, \qquad (1)$$

мувофиқан ҳангоми

$$\frac{279}{308} + \varepsilon, \quad \frac{91}{96} + \varepsilon, \quad \frac{13}{17} + \varepsilon, \quad \frac{2}{3} + \varepsilon, \quad \frac{5}{8} + \varepsilon$$

будан формулаи асимптотиро исбот намуданд.

Дар ин муаммо натиҷаи муҳимро Сзя Чаохуа [149, с. 369-387] ба даст овард. Ба ӯ нишон додани ҳалшаванда будани муодилаи диофантии (1) бо нишондиҳандаи

$$\theta = \frac{7}{12} + \varepsilon$$

муяссар гардид.

«Ҷ. Лю ва Ж. Тао дар камонҳои хурд ва калон барои суммаи $S_2(\alpha;\ x, y)$ ҳангоми $y \ \ge\ x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ баҳои ғайритривиалӣ ҳосил намуданд» [154, с. 369-383]. «Баъдтар онҳо теоремаи Хуа Ло Генро оид ба тасвири адади натуралии кифоя калон ҳамчун суммаи квадратҳои панҷ ададҳои сода, бо шарте, ки ин ҷамъшавандаҳо қариб баробар мебошанд, исбот намуданд. Онҳо нишон доданд, ки адади кифоя калони натуралии намуди $N \equiv 5 \ (mod\ 24)$ –ро дар намуди

$$N = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2, \quad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \le H, \quad H \ \ge\ N^{\frac{11}{23}+\varepsilon}$$

тасвир кардан мумкин аст» [147, с. 68-80].

Т. Жан ва Ҷ. Лю, бо дарназардошти баҳои суммаи $S_2(\alpha;\ x, y)$ исбот намуданд, ки адади калони натуралии $N$ –ро ҳангоми иҷрошавии шарти

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad i = 1, 2, \quad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \le H, \quad H \ \ge\ N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}$$

$$H \ \ge\ N\ 11\ 23 + \varepsilon\,.$$

дар намуди

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2$$

ифода намудан мумкин аст.

«Соли 1938 Хуа Луо Ген ҳангоми таҳқиқи муаммои Варинг – Голдбах нишон доданд, ки ҳамаи ададҳои натуралии тоқи калонро дар намуди суммаи нуҳ кубҳои ададҳои сода тасвир намудан мумкин аст» [147, с. 68-80]. «А.В. Кумчев барои суммаи $S_k(\alpha;\ x, y)$ дар камонҳои хурди $m(P)$, $\tau = x^{k-\frac{2}{2k+3}}P^{-1}$ ҳангоми $y \geq x^{k-\frac{2}{2k+3}+\varepsilon}$ будан баҳои ғайритривиалӣ гирифт» [150, с. 116-131]. «Я. Яо бо истифода аз ин баҳо теоремаи Хуаро дар муаммои Варинг – Голдбах барои кубҳо умумӣ намуда, нишон дод, ки дилхоҳ адади калони натуралии тоқи $N$ –ро дар намуди

$$p_1^3 + p_2^3 + \cdots + p_9^3, \quad \left|p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}}\right| \leq N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{51}+\varepsilon}$$

тасвир намудан мумкин аст» [159, с. 1131-1140].

Соли 2016 З.Ҳ. Раҳмонов ва Ф.З. Раҳмонов [88, с. 220-242] бо истифода аз методи баҳодиҳии суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои содаи И.М. Виноградов бо якҷоягии усули кори Ф.З. Раҳмонов [84, с. 56-60] ва натиҷаҳои кори [88, с. 220-242] баҳои ғайритривиалии

$$S_3(\alpha;\ x, y) \ll \frac{y}{\mathcal{L}^B}$$

-ро дар камонҳои хурди $m\big(\mathcal{L}^{32(B+20)}\big)$, $\tau = y^5x^{-2}\mathcal{L}^{-32(B+20)}$ ҳангоми $y \geq x^{\frac{4}{5}}\mathcal{L}^{8B+151}$ будан, ки дар ин ҷо $B$ – доимии мутлақ мебошад, ба даст оварданд.

Суммаи кӯтоҳи тригонометрии Г. Вейли намуди

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n),$$

барои $n$ –ҳои ихтиёрии қайдшуда дар камонҳои калон дар корҳои [86, с. 445-456] ба пуррагӣ таҳқиқ шудаанд. Ин натиҷаҳо бо якҷоягии баҳоҳои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии Г. Вейл дар камонҳои хурд ҳангоми ба даст овардани формулаҳои асимптотӣ дар масъалаҳои аддитивӣ бо ҷамъшавандаҳои қариб баробари зерин татбиқ шуда буданд:

1. Дар муаммои тернарии Эстерман бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар [83, с. 564-572] оид ба тасвири ададиi натуралии $N, N > N_0$ дар намуди

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

ҳангоми $n = 2, 3, 4$, $p_1$, $p_2$ – ададҳои сода ва ададиi натуралии $m$ бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \;\; i = 1, 2, \quad \left|m^n - \frac{N}{3}\right| \leq H, \;\; H \geq N^{1-\theta(n)}\mathcal{L}^{c_n},$$

мувофиқан ҳангоми

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, c_2 = 2; \theta(3) = \frac{1}{6}, c_3 = 3; \theta(4) = \frac{1}{12}, c_4 = \frac{40}{3}.$$

2. Муаммои Варинг бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар ҳангоми $n = 3, 4, 5$, аниқтараш дар корҳои [84, с. 54-60] формулаҳои асимптотӣ барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии

$$J(N) = \frac{\left(\Gamma(1 + 1/n)\right)^r}{\Gamma(1/n)} N^{\frac{r}{n}-1}\mathfrak{S} + \boldsymbol{O}\left(N^{\frac{r}{n}-1-c(n,r)}\right)$$

дар ин ҷо $\mathfrak{S}$ қатори махсуси суммааш аз ягон бузургии мусбати $c_1(n, r)$ калон мебошад, бо шартҳои

$$x_i - \left(\frac{N}{2^n + 1}\right)^{\frac{1}{n}} \leq H, \;\; i = 1, \ldots, 2^n + 1, \;\; H \geq N^{\frac{1}{n}-\theta(n)+\varepsilon};$$

ки дар ин ҷо

$$\theta(3) = \frac{1}{30}, \;\; \theta(4) = \frac{1}{108}, \;\; \theta(5) = \frac{1}{340}.$$

С.Ю. Фаткина [114] формулаи асимптотиро барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии $N = p_1 + p_2 + \left[\sqrt{2}p_3\right]$ бо ададҳои содаи $p_1, p_2, p_3$ бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \;\; i = 1, 2, \quad \left|\left[\sqrt{2}p_3\right] - \frac{N}{3}\right| \leq H, \;\; H \geq N^{\frac{5}{8}} \ln^c N$$

исбот намуд.

«П.З. Раҳмонов ҳангоми $y \gg \sqrt{x}$ будан баҳои мунтазамро аз рӯи параметри $c$ барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрӣ бо дараҷаҳои ғайрибутуни адади натуралии намуди

$$S_c(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<n\le x} e(\alpha[n^c]),$$

ҳосил намуда, формулаи асимптотиро бо умумикунии муаммои тернарии Эстерман барои дараҷаҳои ғайрибутун бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар оид ба тасвири адади натуралии кифоя калони намуди $p_1 + p_2 + [n^c] = N$ бо ададҳои содаи $p_1,\ p_2$ ва адади натуралии $n$, бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H,\ \ i = 1, 2,\ \ \left|[n^c] - \frac{N}{3}\right| \le H,\ \ H \ge\ N^{1-\frac{1}{2c}} \ln^2 N$$

исбот намуд» [88, с. 220-242]. Аниқтараш дар ин корҳо теоремаҳои зеринро исбот кардааст:

«Теоремаи 1. *Бигузор* $x\ \ge\ x_0,\ y \ge x^{\frac{c-1}{c}} exp(ln\, x)^{0,76}$ ва $|\alpha| \le \frac{x}{y^2}$. *Пас баробарӣ дуруст аст*» [84, с. 613-618]*:*

$$S(\alpha; x, y) = \frac{sin\, \pi\alpha y}{\pi\alpha} e\left(\alpha\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\big(yexp(-\, ln^4\, ln\, x)\big).$$

Аз ин теоремаи натиҷаи зерин бармеояд.

Натиҷаи 1. Бигузор $x\ \ge\ x_0,\ y \ge x^{\frac{5}{6}} exp(ln\, x)^{0,67}$ ва $|\alpha| \le \frac{x}{y^2}$ бошад. Пас баробарии

$$S(\alpha; x, y) = \frac{sin\, \pi\alpha y}{\pi\alpha} e\left(\alpha\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\big(y\; exp(-\, ln^4\, ln\, x)\big)$$

дуруст аст:

«Теоремаи 2. Бигзор $N$ адади ба таври кофӣ калони натуралӣ буда, с – адади ишорашудаи ғайри бутун бо шартҳои» [84, с. 613-618]

$$c > \frac{4}{3} + \mathcal{L}^{-0,3}, \|c\| \ge 3c\big(2^{[c]+1} - 1\big)\mathcal{L}^{-1}\, ln\, \mathcal{L}\ \text{бошад.}$$

Пас, барои Н $\ge N^{1-\frac{1}{2c}}\mathcal{L}^2$ барои $I(N, H)$ – шумораи ҳалли муодилаи

$$p_1 + p_2 + [n^c] = N, \quad \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left|[n^c] - \frac{N}{3}\right| \leq H \quad (11)$$

дар ададҳои содаи $p_1,\ p_2$ ва адади натуралии $n$, формулаи асимптотикӣ дуруст аст:

$$I(N, H) = \frac{18}{3^{\frac{1}{c}}c} \cdot \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{c}}\mathcal{L}^3}\right).$$

Аз ин ҷо натиҷаи зерин бармеояд.

Натиҷаи 2. Чунин нест, ки ҳар як адади натуралии $N > N_0$ ҳамчун ҷамъи ду адади содаи $p_1,\ p_2$ ва қисми бутуни дараҷаи с адади натуралии $n$ бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq N^{1-\frac{1}{c}}\mathcal{L}^2, \quad i = 1, 2,$$

$$\left|n - \left(\frac{N}{3}\right)^{\frac{1}{c}}\right| \leq \frac{3}{3^{\frac{1}{c}}c} N^{\frac{1}{2c}}\mathcal{L}^2 - \frac{9(c-1)}{3^{\frac{1}{c}}2c^2}\mathcal{L}^4 + 1$$

ифода карда шавад, ки дар он $c -$ адади ишорашавандаи ғайрибутун бо шароити

$$c > \frac{4}{3} + \mathcal{L}^{-0,3}, \|c\| \geq 3c\left(2^{[c]+1} - 1\right)\mathcal{L}^{-1} \ln \mathcal{L}$$

бошад.

Ҷ. Шокамолова соли 2010 кори [130, с. 325-332; 131, с. 27-40] оид ба баҳои суммаҳои тригонометрии хатӣ бо ададҳои сода теоремаи зеринро исбот кард:

«Теоремаи 1. Бигузор $x \geq x_0 > 2,\ h \leq x^{-\frac{1}{2c}} exp(-(\ln x)^{0,76}),\ y \geq hx^{\frac{c-1}{c}} exp(\ln x)^{0,76},\ \tau \geq \frac{y^2}{xh},\ b \geq (m+1)(2B+8)$ –адади мусбати ихтиёрӣ» [131, с. 27-40],

$$F(q,\ x) = \begin{cases} exp(-\ln^4 \ln x) \text{ агар } q \leq (\ln x)^b, \\ (\ln x)^{B+3} \qquad \text{агар } q \leq (\ln x)^b. \end{cases}$$

Пас баробарии зерин дуруст аст:

$$S(\alpha;x,y)=\frac{\mu(q)}{\phi(q)}\frac{\sin\pi\lambda y}{\pi\lambda}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)+O\left(\frac{y}{q^{\frac{1}{2}}}F(q,x)\right).$$

Ж. Тао исбот кард, ки таносуби

$$\sum_{\chi}\left[N(\alpha,T+H,\chi)\ll(qT)^{c(1-\alpha)}(lnqT)^{B}\right]$$

барои $c\le 8/3$, $\Theta<1/3$ ва $B\le 216$ дуруст мебошад. Бинобар ин, аз теоремаи 1.1 хосиятҳои зерин бармеояд:

Хосияти 1. Бигзор $x\ \ge\ x_0,\ h\le x^{\frac{3}{16}}exp(-(ln\,x)^{0,76}),\ y\ge hx^{\frac{5}{8}}exp(ln\,x)^{0,76},\ \tau\ge\frac{y^2}{xh},\ b\ge(m+1)(B+6)-$ адади мусбати ихтиёрӣ бошад. Он гоҳ:

$$S(\alpha;x,y)=\frac{\mu(q)}{\phi(q)}\frac{\sin\pi\lambda y}{\pi\lambda}e\left(\lambda\left(x-\frac{y}{2}\right)\right)+O\left(\frac{y}{q^{\frac{1}{2}}}F(q,x)\right).$$

Хулосаи 1. Такмили натиҷаи мувофиқи математики чинӣ Ч. Тао мебошад.

Теоремаи 2. «*Бигзор N адади ба таври кофӣ калони натуралӣ бошад, $I(N,H)$ адади боназардошти N ҳамчун ҷамъи ду адади содаи $p_1$, $p_2$ ва квадрати адади натуралии $m$ бо шартҳои*

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\ \ i=1,2,\ \ \left|m^2-\frac{N}{3}\right|\le H$$

*бошад*» [131, с. 27-40].

*Пас барои* $\mathrm{H}\ge N^{\frac{3}{4}}\mathcal{L}^2$ *формулаи асимптотикии зерин дуруст аст:*

$$I(N,H)=\frac{GH^2}{\sqrt{\frac{N}{3}}\mathcal{L}^2}+O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N}\mathcal{L}^3}\right),$$

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(N)=\prod_{p}\left(1+\left(\frac{N}{p}\right)\frac{1}{(p\ -\ 1)^2}\right).$$

З.Ҳ. Раҳмонов ва шогирди ӯ Ҷ.А. Шокамолова муодилаи Т. Эстерманро

$$p_1 + p_2 + m^2 = N,$$

бо шартҳои қатъӣ ҳангоми ҷамъшавандаҳо қариб бо ҳам баробар будан омӯхтанд ва ҳангоми иҷрошавии шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \;\; i = 1, 2, \;\; \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \le H, \;\; H \ge N^{\frac{3}{4}} \ln^2 N$$

формулаи асимптотикро ба даст овардаанд.

Соли 2011 Д.М. Фозилова дар кори [115, с. 715-718] теорема оид ба формулаи асимптотӣ барои пайдарпайии мураккаби нодир бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, ҳангоме, ки дар муодилаи

$$p_1 + p_2 + m^2 = N,$$

квадрати адади натуралии $m$ ба куби адади сода иваз мешавад, исбот кард, яъне:

«*Теоремаи 1. Бигзор N адади ба кадри кофӣ натуралӣ бошад,* $\varepsilon -$ *адади мусбати ихтиёрие бошад, ки аз* $10^{-6}$ *зиёд нест,* $I(N, H)$ *адади боназардошти N бо ҷамъи ду адади содаи* $p_1, \; p_2$ *куби натуралии* $m$ *бо шароит*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le H, \;\; i = 1, 2, \;\; \left|m^3 - \frac{N}{3}\right| \le H$$

*бошад*» [115, с. 715-718].

$\rho(N, p) -$ *шумораи ҳалли муқоиса* $k^3 \equiv N (mod\ q)$. *Пас барои* $\mathrm{H} \ge N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ *формулаи зерини асимптотикӣ дуруст аст:*

$$I(N, H) = \frac{3\mathfrak{S}H^2}{\sqrt[3]{3N}\, ln^2 N} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N}\, ln^3 N}\right),$$

$$\mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p)}{(p - 1)^2}\right).$$

*Хулоса 1.* $N_0$ *вуҷуд дорад, ки ҳар як адади натуралии* $N > N_0$ *ҳамчун ҷамъи ду адади содаи* $p_1, \; p_2$ *ва куби адади натуралии* $m$ *бо шартҳои*

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \le N^{\frac{5}{6}+\varepsilon}, \;\; i = 1, 2, \;\; \left|m^3 - \frac{N}{3}\right| \le N^{\frac{5}{6}+\varepsilon},$$

*ифода карда шавад, ки дар ин ҷо* $\varepsilon -$ *адади мусбати ихтиёрӣ аз* $10^{-6}$ *зиёд нест.*

Соли 2015 А.О. Раҳимов дар кори [87, с. 769-771] теоремаҳои зеринро исбот намуд:

«*Теоремаи 1. Бигзор N адади ба таври кофӣ калони натуралӣ бошад,* $I(N,H)$ *адади боназардошти N ҳамчун ҷамъи ду адади содаи* $p_1$, $p_2$ *ва дараҷаи чоруми адади натуралии* $m$ *бо шартҳои*

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le H,\ \ i=1,2,\ \ \left|m^4-\frac{N}{3}\right|\le H$$

*бошад*» [87, с. 769-771].

$\rho(N,p)$ *– шумораи ҳалли муқоиса* $x^4\equiv N(mod\ q)$. *Пас барои* $\mathrm{H}\ge N^{\frac{11}{12}}\mathcal{L}^{\frac{40}{3}}$ *чунин формулаи асимптотикӣ дуруст аст:*

$$I(N,H)=\frac{\sqrt[4]{3}\mathfrak{S}(N)H^2}{4\sqrt[4]{N^3}\mathcal{L}^2}+O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathcal{L}^3}\right),$$

$$\mathfrak{S}=\prod_p\left(1+\frac{\rho(N,p)}{(p\ -\ 1)^2}\right).$$

*Натиҷа 1.* $N_0$ *вуҷуд дорад, ки ҳар як адади натуралии* $N\ >\ N_0$ *ҳамчун ҷамъи ду адади содаи* $p_1$, $p_2$ *ва дараҷаи чоруми адади натуралии* $m$ *бо шартҳои*

$$\left|p_i-\frac{N}{3}\right|\le N^{\frac{11}{12}}\mathcal{L}^{\frac{40}{3}},\ \ i=1,2,$$

$$\left|m-\sqrt[4]{\frac{N}{3}}\right|\le\frac{3N^{\frac{1}{6}}\mathcal{L}^{\frac{40}{3}}}{4\sqrt[4]{3}}+\frac{27N^{\frac{1}{12}}\mathcal{L}^{\frac{80}{3}}}{32\sqrt[4]{3}}+\frac{189\mathcal{L}^{40}}{128\sqrt[4]{3}}+0{,}9$$

*ифода карда мешавад.*

Соли 2020 А.А. Собиров дар кори [106, с. 405-415] барои суммаҳои кӯтоҳи тригонометрии хаттӣ ва кубии Г. Вейл бо ададҳои сода, яъне барои суммаи намуди

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\le x}\Lambda(n)\,e(\alpha n^k)$$

ҳангоми $k\ =\ 1$ ва $k\ =\ 3$ будан, формулаи асимптотиро бо аъзоҳои боқимонда исбот кард, аниқтараш теоремаҳои зеринро исбот намуд:

«*Теоремаи 1.* Бигзор $x \geq x_0$, $A$ ва $b$ $-$ адади ғайриманфии қайдшудаи ихтиёрӣ, $1 \leq q \leq \mathcal{L}^b$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \ (a, q) = 1$$

бошад. Пас ҳангоми $|\lambda| \leq (18\pi x y^2)^{-1}$ ва $y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathcal{L}_x^{1,5A+0,25b+18}$ формулаи зерин ҷой дорад

$$S_1(\alpha;\ x, y) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \frac{\sin \pi\lambda y}{\pi\lambda} \ e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O(y\mathcal{L}^{-A}).$$

*Теоремаи 2. Агар* $x \geq x_0$, $A$ ва $b$ — *ададҳои мусбати қайдшудаи ихтиёрӣ,* $1 \leq q \leq \mathcal{L}^b$ *бошад, он гоҳ ҳангоми иҷрошавии шартҳои* $\lambda \leq (18\pi x y^2)^{-1}$ *ва* $y \geq x^{\frac{5}{8}}\mathcal{L}_x^{1,5A+0,25b+18}$ *формулаи асимптотии зерин ҷой дорад:*

$$S_3(\alpha;\ x, y) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e\left(\frac{\alpha n^3}{q}\right) \int_{x-y}^{x} e(\lambda u^k) du \ + O(y\mathcal{L}^{-A}).$$

*Теоремаи 3. Бигзор шартҳои* $x \geq x_0$, $A,\ b_1,\ b$ $-$ *дилхоҳ адади мусбати қайдшуда,* $1 \leq q \leq \mathcal{L}_x^b$, $\tau = y^5 x^{-2}\mathcal{L}_x^{-b_1}$,

$$\eta_3 = \frac{2}{7 + 4\sqrt{3}} \approx 0.1435935394, \ c_3 = \frac{2A + 24 + \left(\sqrt{3} - 1\right)b_1}{4\sqrt{3} - 3}$$

*бошад. Пас ҳангоми иҷрошавии шартҳои* $y \geq x^{1-\frac{1}{5+\eta_3}}\mathcal{L}_x^{c_3}$ ва $\lambda > (18\pi x y^2)^{-1}$ *баҳои зерин*

$$S_3(\alpha;\ x, y) \ll y\mathcal{L}_x^{-A}$$

*дуруст аст*» [106, с. 405-415].

«Т. Эстерман формулаи асимптотиро барои миқдори ҳалҳои муодилаи диофантии намуди

$$p_1 + p_2 + m^2 = N,$$

ки дар ин ҷо $p_1,\ p_2$ $-$ ададҳои сода, $m$ $-$ адади натуралӣ мебошанд, исбот намуд» [143, с. 501-516].

Дар кори [83, с. 564-572] ин масъала бо шартҳои қавитар, яъне ҳангоме, ки ҷамъшавандаҳо қариб баробаранд, таҳқиқ гардида, формулаи асимптотӣ барои миқдори ҳалҳои (3) бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H,\ \ i = 1, 2,\ \ \left|m^2 - \frac{N}{3}\right| \leq H,\ \ H\ \geq\ N^{\frac{3}{4}}\mathcal{L}^3.$$

ҳосил карда шудааст.

Баъдан дар кори [83] формулаи асимптотӣ барои пайдарпайиҳои нодиртар бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, яъне ҳангоми дар муодилаи

$$p_1\ + p_2\ + m^2 = N,$$

квадрати адади натуралии $m$ ба куби он, ҳангоми $H\ \geq\ N^{\frac{5}{6}}\mathcal{L}^{10}$ иваз карда мешавад, ҳосил карда шудааст. Дар кори [87, с. 769-771] барои пайдарпайиҳои боз ҳам нодиртар бо ҷамъшавандаҳои қариб баробар, яъне ҳангоми дар муодилаи

$$p_1\ + p_2\ + m^2 = N$$

квадрати адади натуралии $m$ ба дараҷаи 4-уми он, ҳангоми $H\ \geq\ N^{\frac{11}{12}}\mathcal{L}^{\frac{40}{3}}$ будан, иваз карда мешавад, формулаи асимптотӣ гирифта шудааст.

Дар кори Ж. Тао ва Ҷ. Лю ҳангоми $H \geq N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}$ барои миқдори ҳалҳои муодилаи

$$p_1\ + p_2\ + p_3^2 = N,\ \ \left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H,\ \ i = 1, 2,\ \ \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \leq H,$$

ки дар ин ҷо $p_1,\ p_2$ ва $p_3 -$ ададҳои сода мебошанд, формулаи асимптотӣ исбот шудааст.

Соли 2022 Ш.А. Хайруллоев рисолаи доктории худро бо мушовири илмӣ З.Ҳ. Раҳмонов дар мавзуи «Нулҳои ҳосилаҳои функсияҳои Харди ва Дэвенпорт-Хейлбронн, ки дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ мехобанд» дифо намудааст. Ш.А. Хайруллоев дар кори доктории худ масъалаҳои зеринро дида баромадааст:

1. масъалаи баҳои болоии бузургии дарозии порчаҳои хати рости критик, ки дорои нули тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j – юми функсияи

Харди мебошад, ба масъалаи оптимизатсия дар маҷмуи ҳамаи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст [116, с. 335-348];

2. баҳоҳои нави болоии бузургиҳои дарозии порчаҳои хати рости критикӣ, ки дорои нулҳои тартиби тоқи ҳосилаҳои тартиби j – юми функ сияи Харди мебошанд, гирифта шудааст;

3. баҳоҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳо барои суммаҳои махсуси тригонометрии $W_{\mathrm{j}}(\mathrm{T}), j = 0; 1; 2; 3$ дар истилоҳи ҷуфтҳои экспоненсиалӣ, ки ҳангоми тадқиқи нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда ба миён меоянд, гирифта шудааст [117, с. 271-293];

4. бо истифода аз баҳоҳои нави мунтазам аз рӯи параметрҳои суммаҳои тригонометрӣ, масъалаи баҳодиҳии миқдори нулҳои тартиби тоқи функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн ба масъалаи ҷустуҷӯи чуфтҳои экспоненсиалӣ оварда шудааст;

5. нобаробарии А.А. Каратсуба оид ба миқдори нулҳои функсияи Дэвенпорт-Хейлбронн дар порчаҳои кӯтоҳи хати рости критикӣ хобанда пурзӯр карда шуда, барои порчаҳои дарозиашон кӯтоҳтар исбот карда шудааст.

## ХУЛОСАИ БОБИ III

Мусаллам аст, ки ҳар як далели нав дар асоси назарияи пеш муайяншуда тартиб дода мешавад. Дар назарияи ададҳои сода низ олимони рус ва давраи шуравӣ қоидаву хосиятҳои ин ададҳоро бо таҳлили корҳои бунёдии чунин олимони бузурги Аврупо, монанди Л. Эйлер, К.Ф. Гаусс, А.М. Лежандр, Р. Бертран, Ж. Адамар ва дигарон пешниҳод намудаанд.

Таҳқиқоти илмии П.Л. Чебишев, А.Г, Постников, И.М. Виноградов, Н.Г. Чудаков, Н.М. Коробов, Ю.В. Линник, А.А. Бухштаб, В.А. Голубев, Л.Г. Шнирелман ва дигарон дар назарияи ададҳои сода натиҷаҳои илмии беҳтарин ба шумор меравaнд ва ҳар яки онҳо дар самти илмии худ бо шогирдону пайравонашон мактаби илмӣ ташкил намудаанд. Масалан, ба академик И.М. Виноградов соли 1934 проблемаи Голдбахро бо ёрии теоремаи зерини худ ҳал кардан муяссар гардид.

Теорема. *Чунин адади доимии $N_0$ вуҷуд дорад, ки ҳама ададҳои тоқи аз $N_0$ калонро ҳамчун ҷамъи се адади сода ифода кардан мумкин аст.*

Дар давраи шуравӣ дар Тоҷикистон шогирдони олимони рус таҳқиқоти худро дар соҳаи назарияи ададҳо оғоз намуда, ба натиҷаҳои илмии назаррас ноил гардиданд.

Дар байни ин олимон корҳои З.Ҳ. Раҳмоновро алоҳида қайд кардан лозим аст. Олим дар асоси таҳқиқоти И.М. Виноградов, А.А. Каратсуба ва ғайра, доир ба масъалаҳои гуногуни назарияи ададҳои сода ақидаҳои муҳим баён кардааст.

Дар ин боб натиҷаҳои илмии академик З.Ҳ. Раҳмонов ва шогирдонаш Ҷ. Шокамолова, Д.М. Фозилова, А.О. Раҳимов, Д.Ҷ. Хокиев, О.О. Нозиров, Ш.Ҳ. Мирзораҳимов ва ғайра баррасӣ шудаанд.

Ҳамин тавр, дар ин боб таҳқиқоте инъикос ёфтаанд, ки шарҳи мухтасари натиҷаҳои он мебошад.

I. Дар таърихи назарияи ададҳои сода асарҳои математикони машҳури шуравӣ, ба монанди И.М. Виноградов, А.А. Каратсуба, А.Г.

Постников, А.П. Юшкевич ва ғайраҳо дар асоси мавзуъҳои илмии онҳо доир ба ададҳои сода оварда шудааст. Дар он соҳаи илмии муайянкунии ададҳои сода таҳлил шудааст, ки дар ҳар кадоми онҳо тавсифи мухтасари муаммоҳое, ки дар он баррасӣ карда мешавад, оварда шудааст.

II. Таҳлили илмии таърихи инкишофи муаммои Голдбах-Эйлер ва аз ҷониби олимони рус муайян кардани нақши ҳар кадоми ин олимон дар офаридани усул гузаронида шудааст.

III. Корҳои илмии олимони тоҷик дар солҳои Истиқлолияти давлатӣ баррасӣ гардидааст.

# ХУЛОСАИ УМУМӢ

Солҳои охир ба илмҳои дақиқу риёзӣ, ки дар рушди техника ва технология, пешрафти ҷомеа нақши калидӣ доранд, аҳамияти ҷиддӣ дода мешавад ва дар ин самт, оид ба амалӣ намудани «Барномаи рушди илмҳои табиатшиносӣ, риёзию техникӣ барои солҳои 2010-2020» (қарори Ҳукумати Ҷумҳурии Тоҷикистон, аз 14.04.2010, тахти рақами №101), дар ин замина аз тарафи Пешвои миллат, Президенти мамлакат муҳтарам Эмомалӣ Раҳмон, фармони №1445, аз 31 январи соли 2020 дар бораи «Бисолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» эълон намудани солҳои 2020-2040 ба тасвиб расидааст, мусоидат мекунад.

Донистани таърихи ҳар як илм барои дуруст омӯзиш ва таҳқиқот бурдан ҷиҳати пешрафти соҳа мусоидат мекунад. Аз таҳқиқи масъала маълум мегардад, ки инсоният ба омӯзиши назарияи ададҳои сода аз замонҳои қадим машғул шудааст. Мутаассифона, дастовардҳои зиёди олимони қадим оид ба ин объекти математикӣ то давраи мо нарасидааст. Корҳои назаррас дар соҳаи назарияи ададҳои сода, ба монанди осори Евклид, ки беохирии ададҳои содаро исбот кардааст, Эратосфен барои муайянкунии ададҳои сода усулеро пешниҳод кардааст, ки дар математика ба номи «Ғалбери Эратосфен» маълум буда, аз ҳама усулҳои беҳтарини муайянкунии ададҳои сода эътироф гардидааст [18-М].

Олимони форсу тоҷик Муҳаммад ал-Хоразмӣ (787-850), Абурайҳони Берунӣ (973-1050), Абуали ибни Сино, Собит ибни Қурра (826 – 901), Маҳмуд ибни ал-Вусудӣ, Ибни Ҳайсам (965-1040), Умари Хайём (1048–1131), ал-Форисӣ (1260-1320) ва даҳҳо дигарон дар бораи такмилёбии назарияи ададҳои сода саҳми арзанда гузоштаанд [9-М; 11-М; 12-М; 13-М].

Бояд қайд намуд, ки Абуали ибни Сино дар китоби «Донишнома»-и худ маълумот дар бораи «Ғалбери Эратосфен» додааст, яъне ба забони тоҷикӣ «ғирбол» зикр гардидааст ва ин аз он шаҳодат медиҳад, ки Абуали ибни Сино дар бораи «Ғалбери Эратосфен» маълумот дошта, ба назарияи ададҳои сода диққати махсус зоҳир намудааст.

Такмили назарияи ададҳо дар асрҳои миёна дар Аврупо рушд ёфта, дар самти назарияи ададҳои сода олимони шинохта Мариен Мерсенн ва Пиер Ферма, Л. Эйлер, Х. Голдбах, Ж. Л. Лагранж, Э. Варинг, Г.Ф. Лейбнитс, Е. Люк, Д.Г. Лемер ва даҳҳо дигарон саҳми худро гузоштаанд [2-М; 4-М; 5-М].

Дар асрҳои XVII-XX олмони рус ва шуравӣ монанди П. С. Пореский, А. Слудский, В.Я. Буняковский, А. Полинияк, П.Л. Чебишев, И.М. Виноградов, А.А. Каратсуба, А.Г. Постников, А.П. Юшкевич ва ғайраҳо дар рушди назарияи ададҳои сода дастовардҳои олимони европаро такмил додаанд [4-М; 5-М].

Дар замони муосир дастовардҳои олимони рус ва шуравӣ оид ба назарияи ададҳои содаро шогирдонашон идома додаанд. Яке аз шогирдони онҳо олими тоҷик академик З.Ҳ. Раҳмонов таҳқиқоти И.М. Виноградов, А.А. Каратсуба ва ғайраро идома дода, доир ба масъалаҳои гуногуни назарияи ададҳои сода корҳои назаррас ба анҷом расонида, шогирдҳои зиёде омода намудааст. Самтҳои таҳқиқоти ин олими тоҷикро ба ду қисм ҷудо намудан мумкин [5-М; 6-М]:

1. Як шохаи назарияи ададҳои сода ин «Суммаи қиматҳои ғайри асосии характери Дирихле дар пайдарпаиҳои лағжонидашудаи ададҳои сода» номида шуда, дар ин самт академик З.Ҳ. Раҳмонов ва шогирдонаш дар замони истиқлолият корҳои зеринро ба анҷом расондаанд:

Соли 1994-ум З.Ҳ. Раҳмонов баҳои И.М. Виноградовро аниқтараш баҳои

$$|T_1(\chi)| \ll x^{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}+x^{-\frac{1}{6}}} \quad -\text{ро},$$

ҳангоми модули характери Дирихле адади таркибӣ будан, умумӣ гардонида, теоремаи зеринро исбот намудааст, ки он чунин аст:

Бигзор D –адади натуриалии кифоя калон, $\chi$ –характери ғайриасосӣ аз рӯи модули D, $\chi$q – характери примитивии тавлидшудаи характери $\chi$, $q_1$ – ҳосили зарби ададҳои содае, ки D –ро тақсим карда, аммо адади q –ро тақсим намекунад, бошад, он гоҳ формулаи зерин дуруст аст:

$$T_1(\chi) \leq x \ln^6 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}\tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1)\right)\tau(q).$$

Соли 2013 З.Ҳ. Раҳмонов теоремаи зеринро оид ба баҳои суммаи $T_1(\chi_q)$ исбот намуд: агар q – адади натуралии кифоя калон, $\chi_q$– характери примитивӣ аз рӯи модули q , $(l, q) = 1$, ε – доимии кифоя хурди мусбат ва $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ бошад, он гоҳ баҳои зерин дуруст аст [6-М]:

$$T_1(\chi_q) \ll x\, exp\left(-\sqrt{ln\, q}\right).$$

Солҳои минбаъда ин олим бо шогирдони худ ба дастовардҳои зиёде ноил гаштаанд, ки онҳо ба таври зайл дар теоремаҳо инъикос ёфтаанд:

1) Агар q–адади натуралии кифоя калони аз куб озод, $\chi_q$– характери примитивӣ аз рӯи модули q , $(l, q) = 1$, ε – доимии кифоя хурди мусбат ва $x \geq q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ бошад, он гоҳ баҳои зерин дуруст аст

$$T_1(\chi_q) \ll x\, exp\left(-\sqrt{ln\, q}\right).$$

2). Бигзор $D$–адади натуралии кифоя калон, $\chi$-характери ғайриасосӣ аз рӯи модули $D$, $\chi_q$ – характери примитивӣ аз рӯи модули $q$ тавлидшудаи характери $\chi$, $q$ – адади аз куб озод, $(l, D) = 1, \varepsilon$ – доимии кифоя хурди мусбат, он гоҳ ҳангоми $x \geq D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ будан, формулаи зерин дуруст аст [6-М]

$$T_1(\chi) \ll x\, exp\left(-0{,}6\sqrt{ln\, D}\right).$$

2. Шохаи дигари назарияи ададҳои сода ин «Суммаҳои тригонометрӣ бо ададҳои сода ва татбиқи онҳо дар масъалаҳои адитивии ададҳо сода» мебошад ва оид ба баҳои суммаҳои тригонометрии хаттӣ бо ададҳои сода теоремаи зерин исбот шудааст [6-М]:

Теорема. Бигузор $x \geq x_0 > 2$, $h \leq x^{-\frac{1}{2c}} \exp(-(\ln x)^{0,76})$, $y \geq hx^{\frac{c-1}{c}} \exp(\ln x)^{0,76}$, $\tau \geq \frac{y^2}{xh}$, $b \geq (m+1)(2B+8)$ –адади мусбати ихтиёрӣ,

$$F(q, x) = \begin{cases} \exp(-\ln^4 \ln x) \text{ агар } q \leq (\ln x)^b, \\ (\ln x)^{B+3} \quad \text{ агар } q \leq (\ln x)^b \end{cases}$$

бошад. Пас баробарии зерин дуруст аст:

$$S(\alpha; x, y) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} \frac{\sin \pi\lambda y}{\pi\lambda} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(\frac{y}{q^{\frac{1}{2}}} F(q, x)\right).$$

Теорема. Бигзор N адади ба таври кофӣ калони натуралӣ бошад, $I(N, H)$ адади боназардошти N ҳамчун ҷамъи ду адади содаи $p_1$, $p_2$ ва дараҷаи чоруми адади натуралии m бо шартҳои

$$\left|p_i - \frac{N}{3}\right| \leq H, \ i = 1, 2, \quad \left|m^4 - \frac{N}{3}\right| \leq H$$

буда, $\rho(N, p)$ –шумораи ҳалли муқоиса $x^4 \equiv N(\mathrm{mod}\ q)$ бошад, пас барои $H \geq N^{\frac{11}{12}} \mathcal{L}^{\frac{40}{3}}$ формулаи асимптотикӣ дуруст аст [5-М; 6-М]:

$$I(N, H) = \frac{\sqrt[4]{3}\mathfrak{S}(N)H^2}{4\sqrt[4]{N^3}\mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt[4]{N^3}\mathcal{L}^3}\right), \qquad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p)}{(p-1)^2}\right).$$

Ингуна мисолҳоро зиёд овардан мумкин, ки онҳо дар маҷаллаҳои илмии бонуфуз нашр гардида, илми тоҷикро ба арсаи байналмилалӣ мебардорад.

Ҳамин тавр, назарияи ададҳои сода таърихи муҳим дошта, олимони зиёде дар даврҳои мухталиф, аз ҷумла олимони тоҷик дар солҳои истиқлолият дар рушди ин соҳа саҳми босазо гузоштаанд.

**Тавсияҳо:**

Дар асоси натиҷаҳои таҳқиқоти мазкур чунин тавсияҳоро пешниҳод кардан мумкин аст:

1. Дар курси «Алгебра ва назарияи ададҳо»-и МТОК истифода аз маълумоти дар рисола овардашуда аз манфиат холӣ нест.

2. Дар ихтисосҳои «Математика»-и МТОК ба донишҷӯён семинари махсус оид ба омӯзиши таърих ва зинаҳои рушди назарияи ададҳои сода ташкил кардан ба мақсад мувофиқ аст.
3. Муҳаққиқони соҳа оид ба саҳми донишмандони асримиёнагии форсу тоҷик ва олимони муосир ба назарияи ададҳои сода рисолаҳои оммафаҳм таҳия намоянд, ки ба доираи васеи ҷомеа дастрас ва фаҳмо бошад.
4. Хуб мешуд, агар оид ба таърихи назарияи ададҳои сода ва таҳқиқоти муосири ин самт конференсияҳои илмӣ ташкил карда шаванд.

## РӮЙХАТИ АДАБИЁТ


1. Абуали Ибн-Сино. Донишнаме, –Душанбе, 1967. – 180 с.
2. Ал-Каши Джемши Гиясэддин. Ключ арифметики. Трактат 0б окружности. Пер. Б. А. Розенфельда. Под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича. Комментарии А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда. –М., гостехиздат, 1956. – 566 с.
3. Аристотель. Сочинения / Пер. А.В. Кубицкого и П.С. Попова. Под ред. В.Ф. Асмуса, З.Н. Микеладзе, И.Д. Рожанского. В 3-х т. –М: Мысль, 1974- 1981. Т 1. 1974, М., – 613 с.
4. Архимед. Сочинения / (Перевод, вступ. статья и коммент. И.Н. Веселовского. Перевод арабских текстов Б.А. Розенфельда) – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
5. Ахмадова М.А. Физико-математические сочинения Ибн Сины на таджикском языке: автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1965. – 640 с.
6. Бабаев Г., Субханкулов М.А. Асимптотическая формула для двух аддитивных зада // Ученые записки Тадж. Гос. Университета, Труды физмат факультета, серия математическая, том XXVI, вып. 1 – Душанбе, 1963. – С. 49-68.
7. Бабаев Н.М. Развитие математики и математического образования в связи с развитием астрономии на Среднем и Ближнем Востоке в XV-XVIII вв. автореф. канд. дисс. – Душанбе, 1968. -13 с.
8. Бадалов М. Э. Анализ «Сердцевины счёт» (Лубоб ал-хисаб)—руководства по математике Махмуда Бен Ал-Вусуди, Вопросы истории и методики элементарной математики, вып. II. Ученые записки, том 47, – Душанбе, Издательство «Ирфон» 1965.
9. Беруни Абу Райхан. Памятники минувших поколений, избр. произведение, т. I, перевод и примечания М. А. Салье, Ташкент: Изд-во Акад. наук УзССР, 1957. - 478 с.
10. Беруни Абу Райхан. Избранные произведения. Т. VI. Книга вразумления начаткам науки о звездах. Вступительная статья, пер. и

примеч. Б. А. Розенфельд и А. Ахмедова при участии М. М. Рожанской, А. А. Абдурахманова и Н. Д. Сергеевой. –Ташкент, «Фан», 1975. – 328 с.

11. Бобоҷон Ғафуров. Тоҷикон (таърихи қадимтарин, қадим, асри миёна ва давраи нав). –Душанбе: «Нашриёти муосир», –975 с.
12. Булгаков П.Г., Розенфельд Б.А., Ахмедов А.А., Мухаммад ал-Хорезми. –М.: Наука, 1983. – 239 с.
13. Бугаев Н. В. Числовые тождества, находящиеся в связи со свойствами символа Е. - Матем. сборник, т. 1, (1866), С. – 162 с.
14. Буняковский Б. Я. Об одном видоизменении способа, известного под названием эратосфенова решета. Записки Петербург. АН, т. 41, приложение № 3 (1882). –С. 73.
15. Бухштаб А. А. Новые улучшения в методе Эратосфенова решета. Мат. сб. т. 4(46). –№ 2. 1938. –С. 375 –387.
16. Бухштаб А. А. О разложении четных чисел на сумму двух слагаемых с ограниченным числом простых множителей, // ДАН СССР, 1940, т. XXIX, № 8—9. - С. 544-548.
17. Бухштаб А. А. Об одном соотношении для функции $\pi(x)$ выражающей число простых чисел, не превосходящих $x$.-Матем. сборник, т. 12(54), № 1, (1943), - С. 152 — 160.
18. Бухштаб *А.А.* Теория чисел. Издательство «Просвещение», Москва. 1965. – 379 с.
19. Венков Б. А. О работах Леонарда Эйлера по теории чисел // Леонард Эйлер 1707-1783. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. -М.-Л.: изд-во АН СССР, 1935. - С. 81-88.
20. Виноградов И. М. Некоторые общие теоремы, относящиеся к теории простых чисел // Труды Тбилиского математического института. 1938. Т. 3. - С. 1 – 67.
21. Виноградов И.М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида p + k по простому модулю / И. М. Виноградов/ Математический сборник. 1938. Т. 3. №45. – С. 311 – 320

22. Виноградов. *И.*М. Представление нечетного числа суммою трех простых чисел //*ДАН СССР*. 1939г. Т. 15, Ш/7. С. 291-294.
23. Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. С. 17 – 34.
24. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. – М. «Наука», 1972. – 168 с.
25. Виноградов И. М. Основы теории чисел. - М. : Наука, 1981. – 178 с.
26. Винберг Э. *Б.* Малая теорема Ферма и ее обобщения // Математическое просвещение - М.: Изд-во МЦНМО, 2008. - Т. 12. - С. 43-53.
27. Гейберг И.О. Естествознание и математика в классической древности: Пер. с. нем. - М Л.: Изд-во ОНТИ, 1936. -196 с.
28. Генри С. Уоррен, мл. Глава 16. Формулы для простых чисел // Алгоритмические трюки для программистов. Hacker's Delight. — М.: «Вильямс», 2007. – 284 с.
29. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII — VIII классы. — М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
30. Граве Д.А. Трактат по алгебраическому анализу, т. II, Изд. АН УССР, 1939. – 412 с.
31. Голубев В. А. О группах простых чисел, ученые записки калининский Гос, пед. ин-т им. М. И. Калинина том XXVI, 1958 г. - С. 49-56.
32. Гуломов И. Развитие математической логики в трудах Сина / В мазер. Межд. конф, посвящ. 1025 - летию Абу Али ибн Сина (Авиценны) и 100 - летию специальной теории относительности А.Эйнштейна. Курган-Тюбе, 2005. - С. 191- 195. (на тадж. яз.).
33. Дербишир Джон. Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике. - Астрель, 2010. - С. 464.
34. Диамонд Г. Элементарные методы в изучении распределения простых чисел, УМН, 1990, том 45, выпуск 2(272), - 114 с.

35. Евклид. Начала. / Перевод и коммент. Д.Д.Мордухай- Болтовского. т.1-3. М.-Л., 1948-1950. -446 с.
36. Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа. - Л.: Наука, 1990. - 192 с.
37. Илолов М., Комилӣ А.Ш. Илм дар замони Рӯдакӣ. – Душанбе: Дониш, 2008. – 170 с.
38. Ингам А. Е. Распределение простых чисел. Перевод с английского Д. А. Райкова. ОНТИ 1986, тир. 5000, - 160 с.
39. История математики с древнейших времен до начала X1X столетия (в трех томах), т. 1. - М: Наука, 1970. – 352 с.
40. Иэн Стюарт. Территория простых чисел. Проблема Гольдбаха // Величайшие математические задачи. - М.: «Альпина нон-фикшн», 2016. – 460 с.
41. Кадыров А.К. Из истории развития математики в Средней Азии (IX - XVвв.) / Сост. и редактор М. Нугмонов. Душанбе: ТГПУ, 2004. – 91 с.
42. Карацуба А.А. Об оценках сумм характеров // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. - С. 20 – 30.
43. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 – 727.
44. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии. // Известия АН СССР. Серия математическая. 1971. Т. 35. №3. – С. 299-321/
45. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М., «Наука», 1975г. – 183 с.
46. Карацуба А. А. Эйлер и теория чисел // Современные проблемы математики. Вып. 11. - М.: МИАН, 2008. - С 19—37.
47. Карпушина Н. Палиндромы и «перевёртыши» среди простых чисел // Наука и жизнь. - 2010. - № 5. – С. 108-111.

48. Колмогоров А.Н., Юшкевич А. П. (ред.) Математика XIX века: Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1978. – 256 с.
49. Комилов А.Ш., Сатторов А.Э. О математическом наследии Ибн Сино (Авиценны). Душанбе, Нодир, 2005. – 72 с.
50. Колдуэлл, Крис К. «Простые числа Мерсенна: история, теоремы и списки». PrimePages. Архивировано из оригинала 4 октября 2021 г. Получено 4 октября 2021 г.
51. Крэндалл Р. Померанс К. Простые числа. Криптографические и вычислительные аспекты = Prime Numbers: A Computational Perspective. — М.: УРСС, Либроком, 2011. – 664 с.
52. Кудреватов Г. А. Сборник задач по теории чисел. Издательство «Просвещение». Москва, 1970 г. – 129 с.
53. Лаврик А. Ф. О представлении чисел в виде суммы простого числа и степени заданное целого числа, ДАН СССР, т. 115, № 3, 1957. -С. 354-357.
54. Лаврик А. Ф. Сложение простого числа с простой степенью заданного простого; ДАН СССР, т. 119, № 6. 1958. – С. 1085-1087.
55. Лаврик А. Ф. О теореме Виноградова-Гольдбаха, ДАН УзССР, № 11, 1961.
56. Лаврик А. Ф. О представлении чисел в виде суммы простых по методу Шнирельмана, Изв. АН УзССР. серия физико-мат. наук, № 3, 1962.
57. Левин Б. В. Оценки снизу для масла почти простых чисел в некоторых последовательностях общего вида; Вестник Ленинград. Ун-та, № 7, 1960, - С. 48-65.
58. Левин Б. В. Ослабленная проблема Ландау и её обобщение, УМН, 1961 16, № 2, - С. 123-125.
59. Левин Б. В. К вопросу о распределении простых чисел арифтетической прогрессии, Изв. АН УзССР, № 5, 1961. - С. 15-28
60. Левин Б. В. «О методе решета». Труды Ташкентского Университета, 1961, вып. 189. - С. 31-36.

61. Левин Б. В. Распределение «почти простых» чисел в целозначных полиномиальных последовательностях // ДАН Уз ССР. 1962. № 11. - С. 7-9.
62. Линник Ю.В. Избранные труды // Ленинград. Наука, 1980. -374 с.
63. Линник Ю.В. Новые доказательства теоремы Гольдбаха-Виноградова. Математический сборник, том 19 (61: 1, 1946 г.). -С. 3-8.
64. Линник Ю.В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха // Изв. АН СССР. Сер. матем., 16:6 (1952). -С. 503-520.
65. Линник Ю. В., Постников А. Г. Иван Матвеевич Виноградов (к семидесятилетию со дня рождения) УМН, том 17, 2(104) (1962). -С. 147-159.
66. Литлвуд Дж. Е. Математическая смесь. - М.: Наука, 1990. – 144 с.
67. Матвиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и среднем востоке. Издательство «Фан» Узбекской ССР, Ташкент 1967 г. – 344 с.
68. Матвиевская Г.П., Розенфельд Б.А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII- XVII вв.) / Под ред. А.П.Юшкевича. М: Наука. Гл. редакция восточ. литературы, 1983. т.1 – 479 с.; т.2. – 650 с., т.3. – 372 с.
69. Матвиевская Г.П., Сираждинов С.Х. Абу Райхан Беруни и его математических труды. Москва, 1987. – 99 с.
70. Мирзорахимов Ш.Х., Рахмонов З.Х. Суммы характеров по модулю свободного от кубов на сдвинутых простых // Чебышевский сборник. - 2016 г. - Т.17. - вып.1. - С. 202-216.
71. Михелович Ш. Х., Теория чисел, «Высшая школа», Москва, 1967. – 336 с.
72. Нестеренко Ю. В. Введение в криптографию. - Питер, 2001. – 288 с.

73. Нозиров О.О. О среднем значении функций Чебышёва [Текст] / О.О. Нозиров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2019, Т. 62, –№ 11 – 12, - С. 613–618.
74. Ожигова Е. П. Видоизменение «решета Эратосфена», данное А. Сельбергом, УМН. т. VIII. выл. 3 (55), 1953г. - С. 119-124.
75. Ожигова Е. П. Что такое теория чисел. М.: Знание, (1970), - 97 с.
76. Порецкий П. С. О распознании простых чисел. - Сооб. и протоколы секции физико-матем. наук Казанского об-ва естествоиспыт., т. 6, вып. 1-2. Казан, (1883), - С. 52-140.
77. Постников А. Г., Романов Н. П. Упрощение элементарного доказательства А. Сельберга асимптотического закона распределения простых чисел, УМН, 10:4(66) (1955), - С. 75-87.
78. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, (1967), - 512 с.
79. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле // Успехи математических наук. 1986. Т. 41. № 1. - С. 201 – 202.
80. Рахмонов З.Х. О наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии // Известия АН Таджикский ССР. Отделение физико-математических и геолого-химических наук. 1986. № 2. - С. 103 – 106.
81. Рахмонов З.Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, –№ 1, – С. 211 – 224.
82. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Докл. АН России. 1993, Т. 331(3), – С. 281–282.
83. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 4, – С. 564 – 572.
84. Рахмонов П.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2011 г. – № 3. – С. 56–60.

85. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. №1. – С. 5 – 9.
86. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Мат.заметки. 2014. Т. 95. Вып. 3. – С. 445 – 456.
87. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми [Текст] / А.О. Рахимов // Доклады Ан Республики Таджикистан. -2015 г. -Т.58. -№ 9. – С. 769–771.
88. Рахмонов З.Х., Рахмонов П.З. Короткие кубические суммы с простыми числами // Труды МИРАН. -2016 г. -Т.296. – С. 220–242
89. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН РТ. 2017. Т. 60. №9. – С. 378-382.
90. Рыбников К. А. История математики. 2-е изд. - М.: Издательство МГУ, 1974. – 456 с.
91. Риман Б. Сочинения. М.: Л., (1948), – 543 с.
92. Розенфельд Б.А. Рожанская М.М., Соколовская З.К. Абу- р-Райхан ал-Бируни. - М.: Наука, 1973. – 271 с.
93. Романовский В. И. О двух приближенных формулах к счету простых чисел. – Протоколы заседаний Общества естествоиспытателей, при Императорском Варшавском университете, (1912), – С. 56 – 94.
94. Романовский В. И. О гольдбаховых числах. – Матем. сборник, т. 29, вып. 1, (1913), – С. 1–67.
95. Романовский В. И. О простых числах. Варшавские университетские известия, № 1-2, (1914), – С. 1–47.
96. Романов Н. П. О двух теоремах аддитивной теории чисел, математический сборник, 1933, т. 40, № 4. – С. 514-520.
97. Романов Н. П. Об аддитивных свойствах чисел, УМН, 7 (1940), (перевод изх «107, (1933)). -С. 47 - 56
98. Романов Н. П. К проблеме Гольдбаха. Известия НИИММ при

Томском Университете, т. 1, 1935. – С. 34-38.
99. Рожанская М.М. Механика на средневековом Востоке М.: Наука, 1976. – 324 с.
100. Рожанский И.Д. Античная наука. М.: Наука, 1986. – 200 с.
101. Сатторов А.Э. Математика и математическое образование в трудах ученых средневековой Центральной Азии. Душанбе. Ирфон, 2020 г. – 292 с.
102. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М. - Л., Физматгиз, 1963 г. – 92 с.
103. Слудский Ф. А. Предмет теории чисел и отношение ее к другим отделам математики. - Матем. сб., т. 2. М., (1864), - С. 195-208.
104. Слудский Ф. А. Заметка о числе и форме простых чисел. - Матем. сб., т. 3. М., вып. 1-4. (1868), - С. 214-216.
105. Собиров Г.С. Инкишофи математика дар Осиёи Миёна (асрхои XV-XVII). - Душанбе: Маориф, 1986. – 220 с.
106. Собиров А.А. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами в больших дугах [Текст] / З.Х. Рахмонов, А.А. Собиров, П.М. Фозилова // Доклады НАН Таджикистана. - 2020 г. - т.63. - № 7-8. - С. 405-415.
107. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. / Пер. И.Б. Погребысского. - М: Наука, 1978. – 336 с.
108. Субханқулов М. А. Об одном варианте доказательства теоремы Гольдбаха—Виноградова. Ученные записки, труды физико-математического факультета. Том XVIII. Сталинабад, 1958.
109. Субханқулов М. А. Аддитивные свойства некоторых последовательностей чисел. Исследования по математическому анализу и механике в Узбекистане. Ташкент, 1962, - С. 220-241.
110. Трост Э. Простые числа. Перевод с немецкого Н. И. Фельдмана. Под ред. А. О. Гельфанда. М., Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 136 с.

111. Туси Мухаммед Насирэддин. Трактат о полном четырехстороннике (шаклул гита). Пер. под ред. Г. Д. Мамедбейли и Б. А. Розенфельда. Баку, 1952. – 200 с.
112. Файзиев Р. Ф. Ғалбери Эратосфен, умумикунӣ ва татбиқи он (ададҳои сода). Душанбе нашриёти «Ирфон» с. 1967. – 244 с.
113. Фридландер Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Математические заметки. 2010. Т. 88. В. 4. - С. 605 – 619.
114. Фаткина С.Ю. Об одном обобщении тернарной проблемы Гольдбаха для почти равных слагаемых // Вестник Московского Университета. серия 1. математика. механика. - 2001 г. - № 2. -С. 22-28.
115. Фозилова Д.М. Асимтотическая формула в кубической задаче Эстермана с почти равными слагаемыми / / Доклады АН РТ, 2011 г., том 54, №9, - С. 715-718.
116. Хайруллоев Ш.А. О нулях функции Харди и её производных, лежащих на критической прямой [Текст] /Ш.А. Хайруллоев // Чебышевский сборник. - 2019. -Т. 20. - Вып. 4(72). - С. 335–348. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-4-357-370. (SCOPUS).
117. Хайруллоев Ш.А. Нули функции Дэвенпорта-Хейльбронна в коротких промежутках критической прямой [Текст] /З.Х. Рахмонов, Ш.А. Хайруллоев, А.С. Аминов // Чебышевский сборник. - 2019. - Т. 20. - Вып. 4(72). – С. 271–293. https://doi.org/10.22405/2226-8383 2019-20-4-306-329. (SCOPUS)
118. Хинчин А. Я. Великая теорема Ферма. М.-Л., Гос. техн. -теорет. изд-во, 1934 г. – 55 с.
119. Хокиев Д. Дж. Об оценке суммы характеров с простыми числами [Текст] /З.Х. Рахмонов, Д.Дж. Хокиев. // ДАН Республики Таджикистан. 2018. Т. 61. № 1. - С. 5 – 11.
120. Хуа Ло-Ген. Аддитивная теория простых чисел, Тр. матем. института АН СССР, 22, 1947 г. – 179 с.

121. Хуа Ло-Ген Метод тригонометрических сумм и ее применения в теории чисел [Текст] / Ло-Ген Хуа // - М.: Мир. 1964. – 190 с.
122. Чудаков Н. Г. О плотности совокупности четных чисел, не представимых как сумма двух нечетных простых, Изв. АН СССР, серия математич., 1 (1938). - С. 25-40.
123. Чудаков Н.Г. On Goldbach-Vinogradov‘s theorem // Acta Math (2).1947. Т. 48(3). - С. 515 – 545.
124. Чебышев П. Л. Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины // Полное собрание сочинений. Т. 1.М.—Л.: АН СССР, 1944. – 342 с.
125. Чебышев П. Л. О простых числах. Поли. собр. соч., т. 1. М.; Л, 1946. – 191 с.
126. Чубариков В.Н., Архипов Г.И., Авдеев Ф.С. О проблеме Варинга-Гольдбаха // Современные проблемы математики. 2009. Т. 3. Выпуск 1. - С. 13-31.
127. Шарипова М.С. Математические главы. «Книги исцеления» Ибн Сины. Кандид, дисс-я. - Душанбе, 1967. – 16 с.
128. Шнирельман Л. Г. Об аддитивных свойствах чисел // Известия Донск. политехн. ин-та. - 1930. - Т. 14, вып. 2-3. - С. 3-28.
129. Шнирельман Л. Г. Простые числа. М. -Л., Гостехиздат, 1940 г. – 60 с.
130. Шокамолова Дж.А. Асимтотическая формула в задаче Эстермана с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2010, Т. 53, № 5, - С. 325-332.
131. Шокамолова Дж.А. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами// Известия АН РТ, отд.физ.-мат., хим., геол. и техн. наук, 2010, т. 138, №1, - С. 27-40.
132. Шпачинский Э. К. К вопросу о выделении простых чисел. - Вести, опытной физики и элементарной математики, № 41. Киев, (1888), - С. 107-110.
133. Эльнатанов Б. А. Развитие метода решета. Душанбе издательство «Дониш», 1984. – 148 с.

134. Эльнатанов Б. А. Назарияи элементарии ададҳо. Душанбе «Дониш», 1986. – 80 с.
135. Юшкевич А. П. История математики в средние века. М., 1961. – 448 с.
136. Юшкевич А. П. История математики в России. М., «Наука» 1968. – 592 с.
137. Ягудаев Б. Я. «В мире прекрасных чисел». «O’qituvchi» Ташкент, 1973. – 132 с. (ба забони ӯзбекӣ).

**Адабиёт бо забони англисӣ**

138. Bryce Kerr On certain exponential and character sums, PhD Thesis, UNSW, 2017.
139. Chris Caldwell, The Top Twenty: Palindrome Archived copy from december 10 2008 на Wayback Machine.
140. Cippo1a M. Estensione della formula de Meissel - Rogell... Annali di Matematica p. e. ap... - Francesco Brioschi, ser. 3, t. 11. Milano, (1905), p. 253 - 267.
141. De Numeris libri dvo... authore Goanne Noviomagp. Paris. 1539. Lib. 11. Cap. IV. Reprinded Cologna, 1544; Deventer, 1551; Edition by G. Frizzo. Verona, 1901.
142. Dirichlet L. Toute progression arithmetique dout le premiertermeet la raison son des. entiers, sas diviseur common, contient une infinite denombres premiers. Berlin, (1837), -P. 45 - 71.
143. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math. Soc. —11(1937). - P. 501-516.
144. Fermat P. Oeuvres, v. II, Parisii, 1894, - 334 p.
145. Gauss K.F. Disquisitiones arithmeticae. Leipsial (1801), -P. 30 - 31.
146. Hardy G.H., Littlwood I.E. Some problems of partitio numerorum III. On the expression of number as a sum of primes // Acta Math, 1923, v. 44, - P. 1–70.
147. Hua L.K. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. - 1938. -V.9. -№ 1. - P. 68–80.
148. Huxley N.N. On the difference between consecutive primes // Inventiones mathematical, June 1971, Volume 15, Issue 2, - P. 164–170.

149. Jia Chao-hua. Three primes theorem in a short interval (VII) // Acta Mathematica Sinica. New Series - 1994. -V.10. -№ 4. - P. 369 - 387.
150. Kumchev A.V. On Weyl sums over primes in short intervals // «Arithmetic in Shangrila» Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. - 2012. - V.9. Singapore: World ScientifiC. - P. 116-131.
151. Lebesque V. A. Tables diversees pour la decomposition. - Mem. soc. sci. phus et mat. Bardeaux, 3, c. 1, (1864), -P. 1 - 37.
152. Lebon E. Sur une nouvelle Tables... - Comptes Rendus, 164. Paris, (1917), -P. 117-121.
153. L1oyd L. Dunes. A method of investigating numbers of the forms $6^r s \pm 1$. - Annali of Math. sec. seriers, v. 10, № 3. Cambridge, (1909), p. 105 - 115.
154. Liu J.Y., Zhan T. On sums of five almost equal prime squares // Acta Arithmetica. - 1996. - V.77. - P. 369-383.
155. Meisse1 E. Ueber die Bertimmung... - Math. Annalen, Leipzig, (1870), -P. 636-692.
156. Morehead I.C. Extension of the Sieve of Eratosthenes. - Annali of Math, secone seriers, v. 10. Cambridge, (1908 - 1909), -P. 100 - 105.
157. Prachar K. Uber die Anwendung einer Methode von Linnik // Acta Arith. 29(1976), P. 367 – 376.
158. Utila M. On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference // Ann. Univ. Turku; Ser. A., I, 118 (1968).
159. Yao Y. Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October - 2014. - V.9. - Is.5. - P. 1131–1140.

## ИНТИШОРОТИ ИЛМИИ ДОВТАЛАБИ ДАРЁФТИ ДАРАҶАИ ИЛМӢ АЗ РӮЙИ МАВЗУИ ДИССЕРТАТСИЯ

### а) Мақолаҳое, ки дар нашриёҳои тақризшавандаи Комиссияи олии аттестатсионии назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон чоп шудаанд:

[1-М]. ***Исмоилов А.Ш.*** Аз таърихи муайянкунии ададҳои сода [Матн] / **А.Ш. Исмоилов**, А.Э. Сатторов // Паёми ДДБ ба номи Носири Хусрав. – Бохтар, 2021. – № 2/2 (87). – С. 88-91. (силсилаи илмҳои табиӣ).

[2-М]. ***Исмоилов А.Ш.*** Аз таърихи ҷудокунии ададҳои сода [Матн] / **А.Ш. Исмоилов**, А.Э. Сатторов // Паёми ДДБ ба номи Носири Хусрав. – Бохтар, 2021. – № 2/3 (90). – С. 107-110. (силсилаи илмҳои табиӣ).

[3-М]. ***Исмоилов А.Ш.*** Аз таърихи такмили усули «Ғалбери Эратосфен» [Матн] / **А.Ш. Исмоилов** // Паёми ДДБ ба номи Носири Хусрав. – Бохтар, 2023. – № 2/2 (111). – С. 94-97. (силсилаи илмҳои табиӣ).

[4-М]. ***Исмоилов А.Ш.*** Аз таърихи такмилёбии назарияи тақсимшавии асимптотии ададҳои сода [Матн] / **А.Ш. Исмоилов** // Паёми Донишгоҳи миллии Тоҷикистон, 2024. – № 4. – С. 285-291. (силсилаи илмҳои педагогӣ)

[5-М]. ***Исмоилов А.Ш.*** Аз таърихи муаммои назарияи аддитивии ададҳои сода [Матн] / **А.Ш. Исмоилов**, А.Э. Сатторов // Паёми Донишгоҳи миллии Тоҷикистон. 2024. –№ 6 қисми 1. – С. 208-214. (силсилаи илмҳои педагогӣ)

[6-М]. ***Исмоилзода А.Ш.*** Таҳқиқотҳо оид ба назарияи ададҳои сода дар солҳои истиқлолият [Матн] / **А.Ш. Исмоилзода** // Паёми ДДБ ба номи Носири Хусрав. – Бохтар, 2026. – № 2. – С. 89-96. (силсилаи илмҳои табиӣ).

**б) Мақолаҳое, ки дар дигар нашрияҳо ба табъ расидаанд:**

[7-М]. *Сатторов А.Э.* Маълумотҳои мухтасар доир ба ададҳои сода [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ дар мавзӯи «Масоили мубрами математика ва таълими он» бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» (Солҳои 2020-2040) ва 70-солагии корманди шоистаи Тоҷикистон профессор А.Э. Сатторов. – Бохтар, 2020. – С. 502-503.

[8-М]. *Сатторов А.Э.* Маълумотҳо оиди ҷудокунии ададҳои сода [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи илмӣ-амалии ҷумҳуриявӣ дар мавзӯи «Масъалаҳои муосири илмҳои дақиқ ва технологияҳои иттилоотӣ» бахшида ба 30-солагии истиқлолияти Ҷумҳурии Тоҷикистон ва 25-солагии Донишгоҳи Россия-Тоҷикисто (Славянӣ), 28 майи соли 2021. – Душанбе, 2021. – С. 167-170.

[9-М]. *Сатторов А.Э.* Роҷеъ ба ҷудокунии ададҳои сода [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи илмӣ-методии ҷумҳуриявӣ дар мавзӯи «Татбиқи алгебра ва назарияи ададҳо дар ҳалли масъалалҳои муосир» бахшида ба «Бистсолагии омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф (2020-2040)», ҷашни «90-солагии таъсисёбии ДДОТ ба номи Садриддини Айнӣ», таҷлили «30-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон» ва «85-солагии дотсенти кафедра шодравон Давлятов Раҳматулло» 29 май соли 2021. – Душанбе, 2021. – С. 182-184.

[10-М]. *Сатторов А.Э.* Абурайҳони Берунӣ ва масъалаҳои назарияи ададҳо [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-назариявӣ дар мавзӯи «Нақши Абурайҳони Берунӣ дар рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф». – Бохтар, 2022. – С. 117-120.

[11-М]. *Сатторов А.Э.* Аз таърихи муайянкунии ададҳои сода [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводҳои конференсияи илмию амалии байналмиллалӣ дар мавзуи «Таҳлили комплексӣ ва татбиқҳои он» бахшида ба «Бистсолагии омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф (2020-2040)», 75-солагии корманди шоистаи Тоҷикистон, узви вобастаи АМИТ, профессор И.К. Қурбонов ва 70-солагии профессор Ҷ.С. Сафаров. – Бохтар, 2022. – С. 446-448.

[12-М]. ***Исмоилов А.Ш***. Вопросы арифметики в трудах средневековых персидско-таджикских ученых. Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 65 / Материалы Всеросийской

школы-конференции «Лобачевские чтения». – Казань: Изд-во КФУ, 2022. –Т. 65. – С. 64-68.

[13-М]. *Сатторов А.Э.* Корҳои олимони асримиёнагии форсу тоҷик дар самти назарияи ададҳо [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи илмӣ-назарявии байналмилалӣ дар мавзуи «Мақоми Абурайҳони Берунӣ дар таърихи тамаддуни форс – тоҷик», бахшида ба 1050-солагии мутафаккири бузург. – Бохтар, 2023. – С. 71-74.

[14-М]. *Сатторов А.Э.* Оид ба дастовардҳои олимони асрҳои миёнагии Осиёи Марказӣ дар соҳаи математика ва истифодаи онҳо дар раванди таълим. [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи ҷумҳуриявии илмӣ-назариявӣ дар мавзуи «Масъалаҳои актуалии илми риёзӣ ва методҳои таҳқиқоти онҳо» бахшида ба эълон гардидани солҳои 2020-2040 бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф. – Кулоб, 2023. – С. 41-44.

[15-М]. ***Исмоилов А.Ш.*** О геометрических исследованиях аль-Кушчи. Сборник содержит материалы Всеросийской школы-конференции «Лобачевские чтения - 2023», организованной на базе Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. – Казань, 2023. – С. 96-99.

[16-М]. *Сатторов А.Э.* Аз таърихи такмилёбии назарияи ададҳои сода. [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» ва 70-солагии доктори илмҳои физика-математика, профессор Байзоев Саттор. – Хуҷанд, 2024. – С. 364-367.

[17-М]. *Сатторов А.Э.* Аз таърихи муаммои Голдбах-Эйлер дар бораи ададҳои сода. [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи байналмилалии илмӣ-амалӣ таҳти унвони «Масъалаҳои

мубрами таълими фанҳои техникӣ, дақиқ ва риёзӣ» бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф (2020 – 2040)» ва бахшида ба эълон гардидани солҳои 2022-2026 «Солҳои рушди саноат». – Бохтар, 17-18 майи соли 2024. – С. 527-529.

[18-М]. *Сатторов А.Э.* Носири Хусрав ва ченакҳои риёзии он давр. [Матн] / А.Э. Сатторов, **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи илмӣ-назариявии байналмилалӣ дар мавзуи «Муаммоҳои омӯзиши осори Носири Хусрав ва саҳми ӯ дар таърихи тамаддуни тоҷикон», бахшида ба 1020-солагии мутафаккири бузург. – Бохтар, 25-26 октябри соли 2024. – С. 24-26.

[19-М]. ***Исмоилов А.Ш.*** Назарияи ададҳои сода ва рушди он дар асрҳои миёна. Матн] / **А.Ш. Исмоилов** // Маводи конференсияи илмӣ-амалии байналмилалӣ дар мавзуи «Муаммоҳои муосири математика ва таълими он» бахшида ба «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» (солҳои 2020-2040) ва 35-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон (31 майи соли 2025). – Бохтар. – С. 353-354.

[20-М]. ***Исмоилзода А.Ш.*** Таҳқиқи назарияи ададҳои содаи палиндромӣ. Матн] / **А.Ш. Исмоилзода** // Маводи конференсияи байналмилалии илмию амалӣ дар мавзуи «Муаммоҳои муосири математика», бахшида ба 35-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон, 95-солагии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ ва «Бистсолаи омӯзиш ва рушди илмҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф (солҳои 2020-2040)». – Душанбе, 27-28 уми марти соли 2026. – С. 158-160.

**в) Дастурҳои таълимию методӣ:**

[21-М]. *Сатторов А.Э.* Нобаробариҳо (Ёрии методӣ) [Матн] / Сатторов А. Э., **Исмоилов А. Ш.** // – Бохтар, 2020. – 98 с.

[22-М]. *Сатторов А.Э.* Алгебра ва назарияи ададҳо (матни маърӯза ва коркарди дарсҳои амалию КМРО) (Дастури таълимӣ) [Матн] / Сатторов А.Э., **Исмоилов А.Ш.** // – Бохтар: Матбаа, 2021. – 226 с.